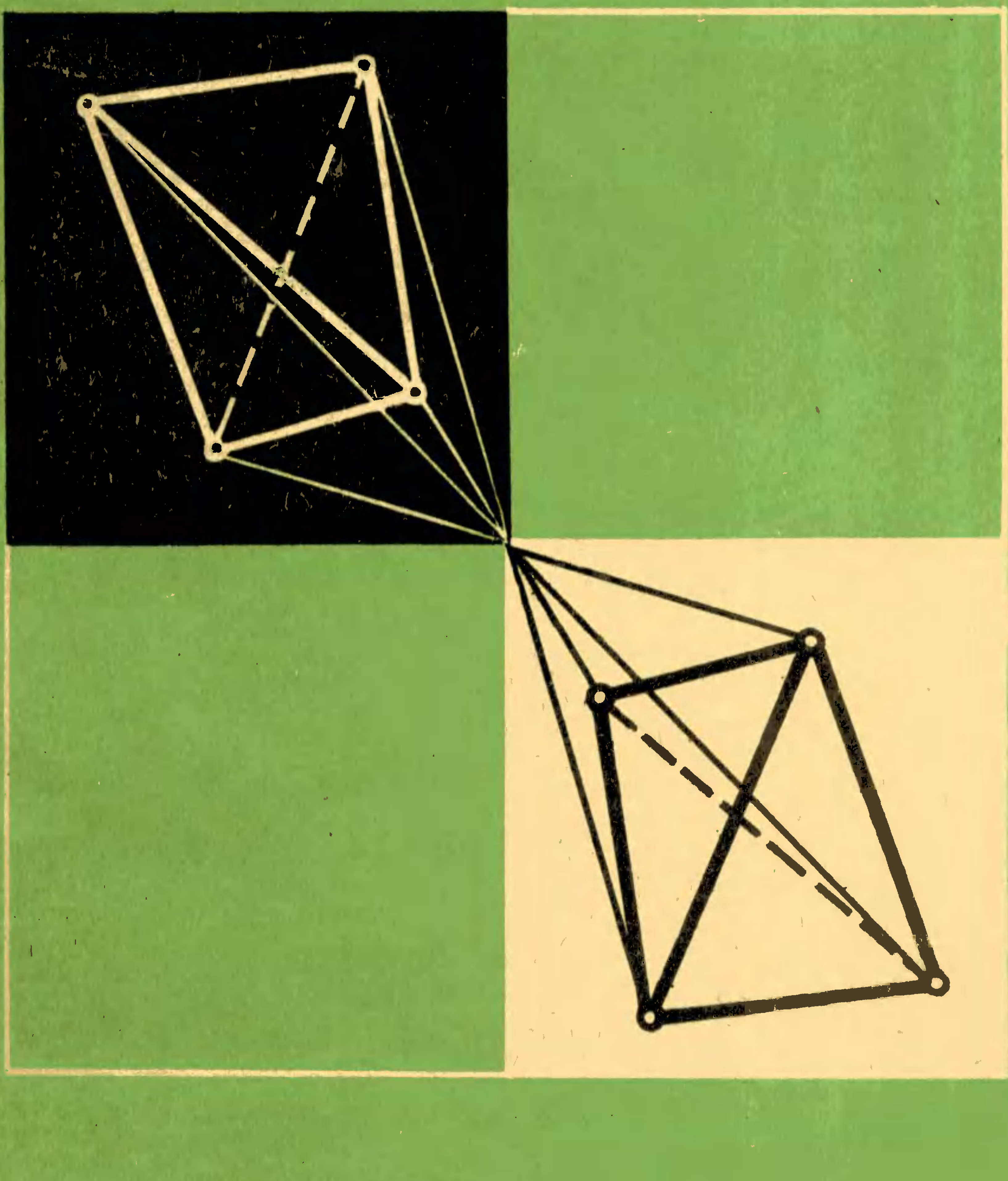
В. А. Гусев, С. Т. Тхамафокова

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА



В. А. Гусев, С. Т. Тхамафокова

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

Гусев В. А., Тхамафокова С. Т.

Г96 Преобразования пространства: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1979. — 94 с.

В настоящей книге рассмотрены преобразования пространства. Все свойства перемещений получаются путем представления перемещений в виде композиций симметрии относительно одной, двух, трех или четырех плоскостей.

Каждый раздел снабжен задачами, как решенными, так и предлагаемыми для самостоятельного решения читателям.

Г $\frac{60501 - 510}{103(03)-79}$ 150—79 4306010400

ББК 74.262.7
513

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопрос об изучении в школе «Геометрических преобразований» имеет богатую историю.

В 1872 г. Ф. Клейн в своей знаменитой «Эрлангенской программе» выдвинул новый синтетический принцип, который позволял все разнообразие геометрических систем понять с единой точки зрения. Различные геометрии можно было интерпретировать как теории инвариантов определенных групп преобразований, соответствующих геометриям. «Эрлангенская программа» оказала также значительное воздействие и на содержание школьных учебников по геометрии. Еще в 1905 г. знаменитый французский математик Борель написал школьный учебник, в котором широко применялись геометрические преобразования.

Академик А. Н. Колмогоров указывал, что при включении в школьные программы преобразований плоскости и пространства следует осуществлять два пожелания:

1) желательно приучить учащихся возможно шире пользоваться геометрическими преобразованиями при доказательстве теорем и решении задач;

2) основные типы геометрических преобразований сами по себе должны сделаться самостоятельными объектами систематического изучения в школе.

Традиционно преобразования плоскости изучались очень поздно, на четвертом году систематического изучения курса геометрии и носили изолированный характер, что явно противоречит выполнению указанных выше пунктов. Преобразования пространства практически совершенно отсутствовали.

Современные школьные программы значительно изменили существовавшее положение. Преобразования плоскости изучаются начиная с V класса, при этом можно с уверенностью сказать, что они изучаются не только сами по себе, но и активно участвуют в доказательствах теорем и при решении задач.

В старших классах учащиеся знакомятся с преобразованиями пространства, симметрией относительно прямой и плоскости, гомотетией, параллельным переносом, центральной симметрией. Вместе с тем следует отметить, что непосредственно в курсе учащимся трудно увидеть применение преобразований пространства, кроме, пожалуй, векторов, при доказательстве различных теорем и решении задач.

Данное пособие призвано восполнить этот пробел и дать в руки учителю материал по преобразованиям пространства, который он может использовать как на уроках, так и во внеклассной работе, а также при проведении факультативных занятий.

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Гуреевичу Г. Б., методисту института усовершенствования учителей Москвы Дудницину Ю. П., научному сотруднику лаборатории обучения математике Сорокину Б. В. и доценту Пичурину Л. Ф. за ценные советы, высказанные в рецензиях на рукопись этой книги.

ВВЕДЕНИЕ

В наше время развитие математики привело к тому, что ее методы исследования внедряются все шире и глубже в новые области науки и техники. Сфера приложения математики все более расширяется, повышая тем самым ее роль в жизни современного общества.

В таких условиях явно недопустимо отставание математического образования школьников от развития математической науки. Поэтому реформа его сейчас стала на уровень задачи государственного значения.

Основная цель преподавания каждого предмета в школе — дать учащимся достаточно ясное представление об основах той науки, из которой учебный предмет берет свое содержание, раскрыть в доступной форме основные ее понятия, идеи и методы.

Известный советский ученый — математик и педагог А. Я. Хинчин говорил: «Ни в одном случае школа не должна в целях упрощения искажать научную трактовку понятия, придавать ему черты, противоречащие научному его пониманию, — черты, которые в последующем пришлось бы искоренять»*.

В системе математического образования геометрии принадлежит одна из ведущих ролей. Связь школьной геометрии с геометрией как наукой является важнейшей задачей преподавания математики, поэтому необходимо, чтобы в школьном преподавании геометрии были в возможно большей мере отражены понятия, идеи и методы геометрии как науки.

Геометрические преобразования являются той основой курса геометрии, которая в полной мере отвечает современным требованиям математического образования.

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА, ПРЕДШЕСТВУЮЩАЯ ИЗУЧЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА

Для того чтобы учащиеся могли более основательно изучать преобразования пространства, необходимо, чтобы у них имелся серьезный запас знаний из планиметрии. Следовательно, прежде

* Хинчин А. Я. Педагогические статьи, с. 29.

чем строить систему изложения преобразований пространства, надо создать базу, тот основной запас знаний, имея который учащиеся наиболее эффективно могут усвоить этот стереометрический материал.

Что же должны знать школьники, чтобы успешно изучать преобразования пространства?

1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Приступая к систематическому изучению курса планиметрии, мы прежде всего опираемся на понятие отображения, которое появляется в курсе алгебры VI класса.

Авторы вводят понятие функции, опираясь на понятие отношения, а затем определяют понятие отображения множества на множество*.

Среди отображений мы выделяем обратимые отображения.

Отображение множества Φ *на множество* Φ_1 *обратимо, если каждый элемент множества* Φ_1 *является образом только одного элемента множества* Φ.

Если отображение f множества Φ на множество Φ_1 обратимо, то обратным к нему отображением h называется отображение, которое любой элемент X_1 множества Φ_1 отображает на тот единственный элемент X множества Φ, образом которого при отображении f был X.

Центральное место при изучении курса геометрии занимают отображения, сохраняющие расстояния между точками.

Выясним важное свойство таких отображений.

Теорема 1. **Отображения, сохраняющие расстояния, обратимы. Обратные к ним отображения тоже сохраняют расстояния.**

Доказательство. Пусть f — отображение, сохраняющее расстояния. и X, Y — две произвольные различные точки фигуры Φ, а X_1 и Y_1 — образы точек X и Y в отображении f. Тогда $|XY| > 0$, но $|X_1Y_1| = |XY|$, так как отображение f сохраняет расстояние. Значит, и $|X_1Y_1| > 0$. Поэтому X_1 и Y_1 — различные точки (по первому свойству расстояний). Значит, при отображении f две различные точки не могут иметь один и тот же образ. Поэтому отображение обратимо. Обратное ему отображение тоже сохраняет расстояние (так как если $|X_1Y_1| = |XY|$, то $|XY| = |X_1Y_1|$).

Рассуждения, проведенные сейчас, верны для любого отображения, сохраняющего расстояния. Значит, теорема доказана. В планиметрии мы в основном занимаемся отображениями плоскости на себя, сохраняющими расстояния между точками. Их мы называем перемещениями.

---

* Понятие отношения в школьном курсе не определяется.

Отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками, называется перемещением.*

В VI—VIII классах изучают четыре вида перемещений.

Центральная симметрия. Введем определение симметричных относительно данного центра точек.

Точки A и B называются симметричными относительно центра O, если точка O — середина отрезка AB.

Дадим определение центральной симметрии.

Центральной симметрией с центром O называется отображение плоскости на себя, при котором точка O отображается на себя, а любая другая точка — на симметричную ей относительно центра O.

Центральная симметрия с центром O обозначается Z_O.

Примем без доказательства предложение: **центральная симметрия сохраняет расстояния между точками,** а значит, является перемещением. На рисунке 1, например, $A_1 = Z_O(A)$, $B_1 = Z_O(B)$; значит, $|AB| = |A_1B_1|$.

Известно, что отображение, сохраняющее расстояния, обратимо. Значит, у центральной симметрии Z_O есть обратное отображение. Легко понять, что отображение, обратное к центральной симметрии Z_O, есть сама эта центральная симметрия Z_O.

В самом деле, если $Z_O(X) = X_1$, то точка O является серединой отрезка XX_1. Но тогда и $Z_O(X_1) = X$. Значит, отображение $X_1 \to X$, обратное к отображению $X \to X_1$, есть та же центральная симметрия.

Отметим еще одно свойство центральной симметрии.

Любая прямая, проходящая через центр симметрии O, отображается на себя при центральной симметрии с центром O. При этом луч OA отображается на противоположно направленный луч OA_1 и луч OA_1 — на луч OA.

Доказательство. Пусть центр симметрии O принадлежит прямой p (рис. 2). Возьмем на прямой p любую другую точку M. При симметрии прямая OM отображается на прямую, проходящую через образы точек O и M. Но точка O отображается на себя, а точка M — на точку M_1 прямой p. Поэтому прямая OM отображается на прямую OM_1, т. е. на себя. Кроме того, точки M и M_1 находятся по разные стороны от центра O и, следовательно, лучи OM и OM_1 противоположно направлены.

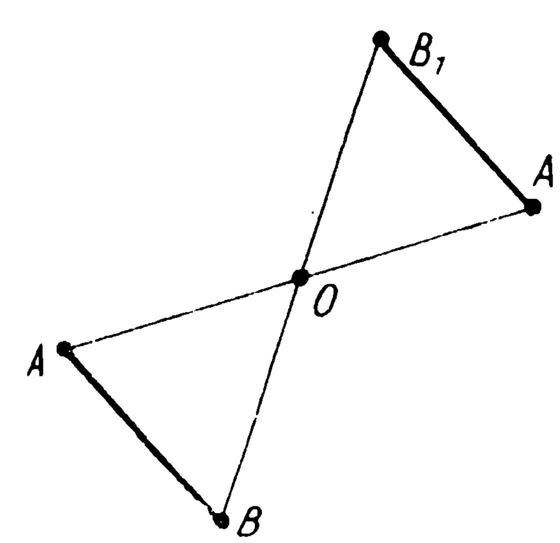


Рис. 1

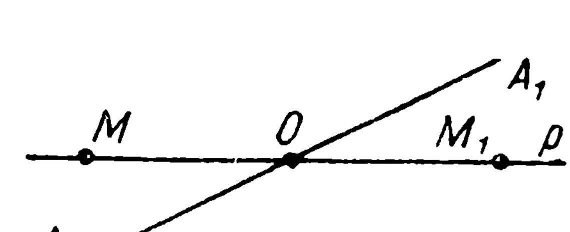


Рис. 2

* Отображение, которое отображает каждую точку на себя (тождественное отображение), также считается перемещением.

Отображение плоскости на себя считается заданным, если для каждой точки плоскости можно указать ее образ.

Центральная симметрия будет задана, если задать центр симметрии или если задать две соответствующие точки $A \to A_1$, так как в этом случае центр симметрии — середина отрезка AA_1.

Если фигура отображается на себя при центральной симметрии Z_O, то она называется центрально-симметричной фигурой. Говорят также, что такая фигура имеет центр симметрии O.

Осевая симметрия. Дадим определение точек, симметричных относительно данной оси.

Точки X и X_1 называются симметричными относительно оси p, если прямая p перпендикулярна отрезку XX_1 и проходит через его середину.

Осевой симметрией с осью p называется отображение плоскости на себя, при котором точки оси p отображаются на себя, а любая другая точка — на точку, симметричную ей относительно оси p.

Осевая симметрия с осью p обозначается S_p.

Принимаем без доказательства следующее предложение.

Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками, а следовательно, является перемещением.

Легко доказать, что отображение, обратное осевой симметрии S_p, есть сама осевая симметрия S_p. В самом деле, из определения осевой симметрии мы имеем, если $S_p(X) = Y$, то $S_p(Y) = X$, а значит, отображение $Y \to X$, обратное отображению S_p, есть та же симметрия S_p.

Осевая симметрия будет задана, если задать ось симметрии или пару соответствующих точек.

Отметим еще одно свойство осевой симметрии:

Любая прямая, перпендикулярная оси симметрии p, отображается на себя при симметрии S_p.

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна оси симметрии p. Если X — произвольная точка прямой a, то точка $X_1 = S_p(X)$ по определению осевой симметрии принадлежит этой же прямой a.

Поворот. *Поворотом с центром O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором:*

а) *центр поворота, точка O, отображается сама на себя,*

б) *каждая точка X отображается на точку X_1, лежащую на расстоянии $|OX|$ от точки O на луче, образующем с лучом OX угол α.*

Поворот с центром O на угол α обозначается R_O^α.

При этом угол α меняется в пределах от -180° до 180°, а поворот на 0° есть тождественное отображение плоскости.

Можно доказать, что *поворот сохраняет расстояния между соответствующими точками и, следовательно, является перемещением.*

Поворот будет задан, если задать центр поворота и угол поворота.

Отображение, обратное повороту с центром O, является тоже поворотом с центром O. Например, для поворота $R_O^{90°}$ обратным является поворот $R_O^{-90°}$.

При повороте на угол α, отличный от 0°, вообще говоря, только центр поворота отображается сам на себя.

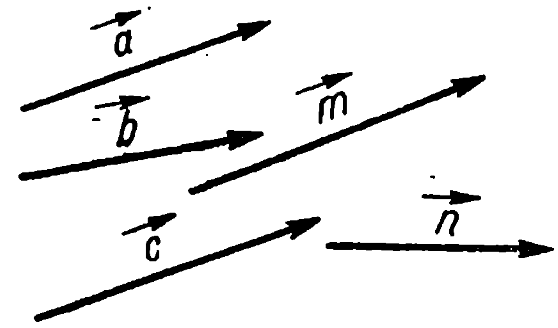


Рис. 3

Параллельный перенос (вектор). *Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.*

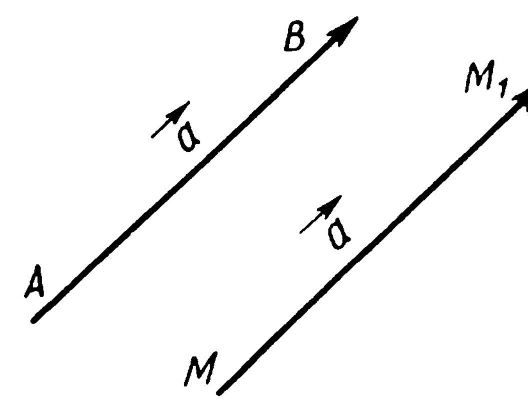


Рис. 4

В учебнике геометрии для VII класса доказано, что **параллельный перенос сохраняет расстояние между соответствующими точками, т. е. является перемещением.** В геометрии параллельные переносы имеют второе название — они называются векторами.

Вектор (параллельный перенос) определяется заданием пары точек (A, B) (произвольной точки A и ее образа B). Поэтому вектор удобно обозначать двумя буквами. Вектор, отображающий точку A на точку B, обозначают $\overrightarrow{AB}$. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ отображает точку X на точку Y, точку C на точку C_1 и т. д., то его можно обозначить и $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, т. е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{CC_1}$. Часто вектор обозначают просто буквой со стрелкой: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 3).

Запись $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM_1}$ означает, что вектор $\vec{a}$ отображает точку A на точку B, точку M — на точку M_1: $\vec{a}(A) = B$, $\vec{a}(M) = M_1$ (рис. 4).

Для данного вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ расстояние $|AB|$ при любом выборе точки A одно и то же. Оно называется длиной вектора $\vec{a}$ и обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Направление, которое задано лучом AB, называется направлением вектора $\overrightarrow{AB}$.

Параллельный перенос на расстояние, равное нулю, есть тождественное отображение плоскости. Это отображение называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Каковы бы ни были точки A, B, X... имеем $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{XX} = \ldots$ Нулевой вектор не имеет направления.

Всякий не нулевой вектор может быть задан длиной и направлением.

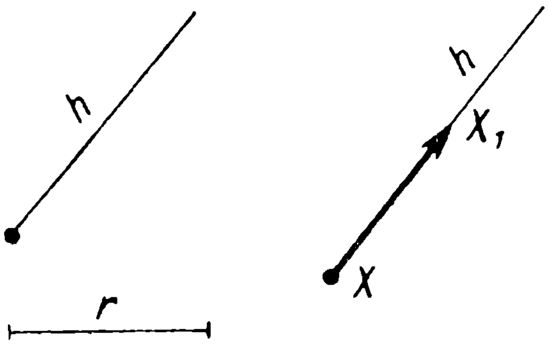


Рис. 5

Действительно, если заданы длина r и направление h вектора $\vec{a}$, то для любой точки X можно построить ее образ X_1 (рис. 5). Для этого построим луч заданного направления h с началом в точке X. Затем на этом луче построим точку X_1 на расстоянии r от его начала X.

Получим $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$.

Построение направленного отрезка OA, для которого $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ называют откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки O.

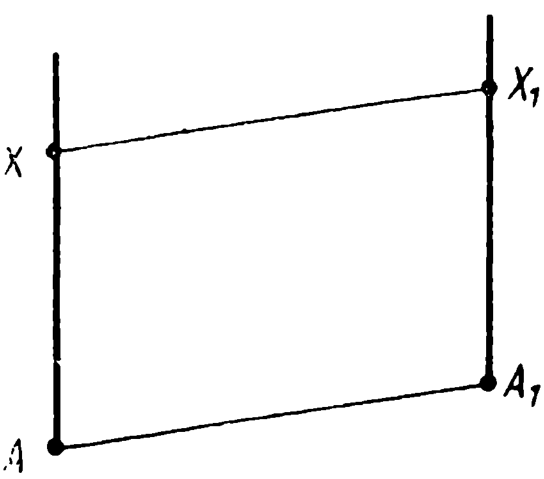


Рис. 6

Отображение, обратное вектору $\vec{a}$, называется противоположным вектором и обозначается: «$-\vec{a}$».

Параллельный перенос отображает любой луч на сонаправленный ему луч (докажите самостоятельно). Это свойство параллельных переносов выделяет их среди всех других перемещений, поэтому оно называется характеристическим.

Теорема 2. **Если перемещение отображает любой луч на сонаправленный ему луч, то это перемещение есть параллельный перенос.**

Доказательство. Пусть перемещение F отображает любой луч на сонаправленный ему луч.

Выберем на плоскости какую-либо точку A. Обозначим через A_1 ее образ при перемещении F : $A_1 = F(A)$.

Возьмем произвольную точку X, отличную от A (рис. 6). Перемещение F отображает луч AX на сонаправленный ему луч с началом в точке A_1 (по условию теоремы). Такой луч имеется только один. Образ точки X — точка X_1 — лежит на этом луче и $|A_1X_1| = |AX|$, так как четырехугольник AA_1X_1X — параллелограмм. Такая точка X_1 единственна.

Итак, $F(X) = X_1$, где $X_1 \in [A_1X_1]$ и $|A_1X_1| = |AX|$.

Рассмотрим теперь параллельный перенос T, который задается парой соответственных точек $A \to A_1$. Докажем, что данное перемещение F и есть этот параллельный перенос T.

Параллельный перенос отображает любой луч на сонаправленный ему луч. Поэтому образом луча AX при параллельном переносе T является луч A_1X_1. Тогда образом точки X при этом параллельном переносе является точка X_1, так как при параллельных переносах расстояния сохраняются.

Следовательно, $T(X) = X_1$, где $X_1 \in [AX_1]$ и $|A_1X_1| = |AX|$.

Итак, и перемещение F и параллельный перенос T произвольную точку X плоскости отображают на одну и ту же точку X_1. Следовательно, F и T есть одно и то же перемещение: $F = T$.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Одно свойство перемещений нами уже доказано — это теорема на странице 6. Его можно сформулировать так: перемещение — обратимое отображение. Отображение, обратное перемещению, — перемещение.

Теорема 3. **Пусть F — перемещение. Если точка X лежит между точками A и B, то $F(X)$ лежит между $F(A)$ и $F(B)$.**

Доказательство. По определению отношения «лежать между» A, X и B различны и $|AX| + |XB| = |AB|$.

F — перемещение. Поэтому $|AX| = |F(A)F(X)|$, $|BX| = |F(B)F(X)|$, $|AB| = |F(A)F(B)|$ и, следовательно, $|F(A)F(X)| + |F(X)F(B)| = |F(A)F(B)|$ и т. д. Пользуясь этой теоремой, можно доказать следующую теорему:

Теорема 4. **Всякое перемещение F плоскости отображает:**

а) **отрезок AB на отрезок $F(A)F(B)$;**

б) **луч AB на луч $F(A)F(B)$;**

в) **прямую AB на прямую $F(A)F(B)$;**

г) **полуплоскость (открытую) с границей AB на полуплоскость (открытую) с границей $F(A)F(B)$;**

д) **выпуклый (невыпуклый) угол AOB на выпуклый (невыпуклый) угол $F(A)F(O)F(B)$;**

е) **окружность (круг) радиуса r с центром O на окружность (круг) того же радиуса с центром $F(O)$.**

Доказательство. а) Пусть X — внутренняя точка отрезка AB.

Тогда по теореме 3 $F(X)$— внутренняя точка отрезка $F(A)F(B)$. Значит, образ отрезка AB при перемещении F содержится в отрезке $F(A)F(B)$.

Остается доказать, что каждая точка C, принадлежащая отрезку $F(A)F(B)$, является образом некоторой точки $[AB]$; F^{-1}* — перемещение (теорема 1), $C_1 = F^{-1}(C)$ — внутренняя точка $[AB]$. Но $F(C_1) = (F(F^{-1}(C))) = C$.

Предложения б), в), д) и е) доказываются аналогично. Чуть труднее доказывается предложение г).

Вспомним, что плоскость — объединение трех попарно-непересекающихся множеств — прямой AB и двух открытых полуплоскостей α' и α'', ограниченных (AB). При обратимых отображениях образ объединения (пересечения) — объединение (пересечение) образов этих множеств. Значит, объединение трех попарно-непересекающихся множеств $F(\alpha')$, $F(\alpha'')$ и $F((AB))$ — плоскость.

Но образ (AB) при перемещении F — прямая $F(A)F(B)$; $F(\alpha') \cap F(\alpha'') = \varnothing$. Отрезок, соединяющий две точки, лежащие в одной из открытых полуплоскостей $F(\alpha')$ или $F(\alpha'')$, не имеет общих точек с прямой $F(A)F(B)$, а отрезок, соединяющий точку

* Символ F^{-1} используется для обозначения отображения, обратного к отображению F.

$F(a')$ с точкой $F(a'')$, пересекается с прямой $F(A)\,F(B)$ (для доказательства достаточно рассмотреть F^{-1}).

Следовательно, $F(a')$ и $F(a'')$ — открытые полуплоскости с границей $F(A)\,F(B)$ и т. д.

3. КОНГРУЭНТНЫЕ ФИГУРЫ

Фигура Φ_1 конгруэнтна фигуре Φ_2, если Φ_1 можно отобразить на фигуру Φ_2 с сохранением расстояний между точками.

Конгруэнтность фигур обозначается знаком «$\cong$»: $\Phi_1 \cong \Phi_2$.

Отношение конгруэнтности фигур обладает следующими свойствами:

1) каждая фигура конгруэнтна себе (свойство **рефлексивности**):
$$\Phi \cong \Phi;$$

2) если фигура Φ_1 конгруэнтна фигуре Φ_2, то и фигура Φ_2 конгруэнтна фигуре Φ_1 (свойство **симметричности**):
$$\text{если } \Phi_1 \cong \Phi_2, \text{ то } \Phi_2 \cong \Phi_1;$$

3) если фигура Φ_1 конгруэнтна фигуре Φ_2, и фигура Φ_2 конгруэнтна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 конгруэнтна фигуре Φ_3 (свойство **транзитивности**):
$$\text{если } \Phi_1 \cong \Phi_2 \text{ и } \Phi_2 \cong \Phi_3, \text{ то } \Phi_1 \cong \Phi_3.$$

Докажем первое свойство. Пусть Φ — некоторая фигура. Каждой ее точке X поставим в соответствие эту же точку X. Получим тождественное отображение фигуры Φ на себя. Оно сохраняет расстояния, так как для любых точек A и B имеет место равенство $|AB| = |AB|$. Значит, $\Phi \cong \Phi$.

Второе свойство конгруэнтности фигур следует из теоремы об обратимости отображений, сохраняющих расстояния.

Объясним замысел доказательства третьего свойства. Если фигура Φ_1 конгруэнтна фигуре Φ_2, то копию фигуры Φ_1 можно «наложить» на фигуру Φ_2. Затем эту копию можно наложить на фигуру Φ_3, так как $\Phi_2 \cong \Phi_3$. Поэтому фигуру Φ_1 можно отобразить на фигуру Φ_3 с сохранением расстояний. Значит, $\Phi_1 \cong \Phi_3$.

Так как отображения, сохраняющие расстояния между точками, есть перемещения, то при всех рассмотренных выше перемещениях каждая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру.

4. КОМПОЗИЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Композицией перемещений F_1 и F_2 называется отображение, которое любую точку M плоскости отображает на такую точку M', что $M' = F_2(F_1(M))$. Композицию отображений F_1 и F_2 обозначают $F_2 \circ F_1$.

Теорема 5. **Композиция перемещений есть перемещение.**

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — перемещения. Чтобы доказать, что композиция $F_2 \circ F_1$ есть перемещение, надо доказать, что:

а) композиция $F_2 \circ F_1$ есть отображение плоскости на себя;

б) отображение $F_2 \circ F_1$ сохраняет расстояния.

а) Пусть M — произвольная точка плоскости. При перемещении F_1 точка M имеет определенный образ M_1. Точка M_1 при перемещении F_2 также имеет определенный образ M_2. Точка M_2 является образом точки M при отображении $F_2 \circ F_1$ (по определению композиции). Следовательно, каждая точка M плоскости имеет определенный образ M_2 при композиции $F_2 \circ F_1$.

Теперь докажем, что каждая точка K_2 плоскости является образом некоторой точки K при композиции $F_2 \circ F_1$.

Точка K_2 является образом некоторой точки K_1 при перемещении F_2, так как перемещение есть отображение плоскости на себя. Точка K_1, в свою очередь, является образом некоторой точки K при перемещении F_1. Следовательно, точка K_2 является образом точки K при отображении $F_2 \circ F_1$ (по определению композиции отображений).

Итак, при композиции $F_2 \circ F_1$ каждой точке плоскости соответствует определенная точка этой же плоскости, и каждая точка плоскости является образом некоторой точки этой же плоскости. Следовательно, композиция $F_2 \circ F_1$ есть отображение плоскости на себя.

б) Пусть A и B — произвольные точки плоскости. Обозначим их образы при перемещении F_1 через A_1 и B_1. Образы точек A_1 и B_1 при перемещении F_2 обозначим через A_2 и B_2. Тогда точки A_2 и B_2 — образы точек A и B при отображении $F_2 \circ F_1$.

По определению перемещения $|A_1B_1| = |AB|$ и $|A_2B_2| = |A_1B_1|$. Значит, $|A_2B_2| = |AB|$. Следовательно, отображение $F_2 \circ F_1$ сохраняет расстояния, т. е. является перемещением.

Композиции перемещений для этой книги имеют особое значение, так как многие свойства преобразований пространства, да и сами определения некоторых преобразований вводятся с использованием понятия композиции.

В восьмилетней школе мы встречаемся с определением композиции отображений в VII классе, однако некоторые примеры композиций нам встречаются и раньше. Подробно рассматриваются лишь композиции параллельных переносов и поворотов. Напомним кратко основные факты.

Теорема 6. **Композиция векторов есть вектор.**

Композицию векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *принято называть суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. При этом вместо записи $\vec{b} \circ \vec{a} = \vec{c}$ применяется запись $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Рассмотрим повороты $R^{20°}$ и $R^{30°}$ с общим центром O. Найдем их композицию.

Образом точки O при каждом из поворотов $R^{20°}$ и $R^{30°}$ является та же точка O. Поэтому при композиции $R^{30°} \circ R^{20°}$ точка O отображается на себя.

Пусть A — произвольная точка плоскости, отличная от точки O (рис. 7)

$$R^{20°}(A) = A_1, \quad R^{30°}(A_1) = A_2.$$

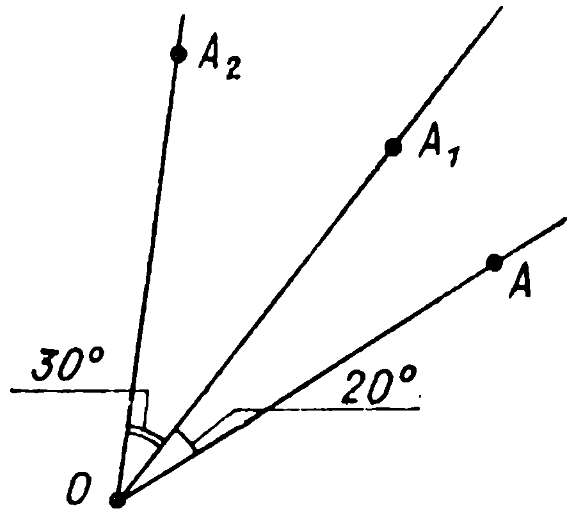


Рис. 7

Значит, $(R^{30°} \circ R^{20°})(A) = A_2$, причем $A_2 \neq A$.

Композиция поворотов $R^{20°} \circ R^{30°}$ есть перемещение. При этом перемещении только одна точка (точка O) отображается на себя. Такое перемещение есть поворот с центром O. Углом этого поворота является:

$$\widehat{AOA_2} = 20° + 30° = 50°.$$

Значит,

$$R^{30°} \circ R^{20°} = R^{50°}.$$

В школьном курсе мы принимаем без доказательства тот факт, что при любых углах поворота α и β:

$$R^{\beta} \circ R^{\alpha} = R^{\alpha+\beta}.$$

Отсюда легко доказать, что композиции поворотов с общим центром обладают переместительным свойством. Действительно $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Поэтому $R^{\beta} \circ R^{\alpha} = R^{\alpha+\beta} = R^{\beta+\alpha} = R^{\alpha} \circ R^{\beta}$.

Рассмотрим теперь некоторые дополнительные сведения о композициях перемещений.

В общем случае

$$f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1.$$

Для подтверждения этого факта достаточно проверить, что, например, $S_l \circ Z_O \neq Z_O \circ S_l$, $O \notin l$ (проверьте самостоятельно).

Теорема 7. **Композиция отображений обладает ассоциативным свойством.**

Доказательство. Пусть A — произвольная точка плоскости, A_1 — образ точки A при отображении f_1, A_2 — образ точки A_1 при отображении f_2, A_3 — образ точки A_2 при отображении f_3, т. е. имеют место соотношения:

$$f_1(A) = A_1, \quad f_2(A_1) = A_2, \quad f_3(A_2) = A_3.$$

По определению композиции отображений точка A при отображении $f_2 \circ f_1$ отображается на точку A_2, а точка A_1 при отображении $f_3 \circ f_2$ отображается на точку A_3. Поэтому

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(A) = f_3(A_2) = A_3 \text{ и}$$
$$((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(A) = (f_3 \circ f_2)(A_1) = A_3.$$

Следовательно,

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1.$$

Рассмотрим примеры композиций перемещений.

1) Композиция двух центральных симметрий Z_{O_1} и Z_{O_2} с различными центрами.

Пусть O_1 и O_2 — две различные точки (рис. 8). Отметим какую-либо точку M плоскости. Построим $M_1 = Z_{O_1}(M)$. Затем построим $M_2 = Z_{O_2}(M_1)$.

Точка M_2 — образ точки M при композиции $Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$

$$M_2 = Z_{O_2} (Z_{O_1} (M)).$$

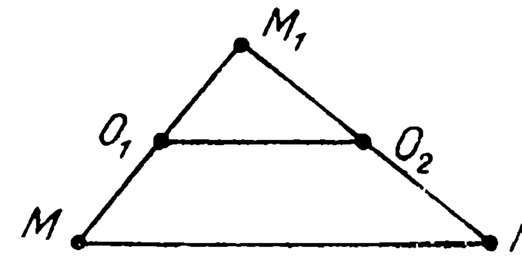


Рис. 8

Рассматривая треугольник MM_1M_2, замечаем, что отрезок O_1O_2 — средняя линия этого треугольника. Поэтому $[MM_2] \parallel [O_1O_2]$ и $|MM_2| = 2 \mid O_1O_2|$. Отсюда можно сделать предположение, что композицией центральных симметрий Z_{O_1} и Z_{O_2} является параллельный перенос на расстояние $2 \mid O_1O_2 \mid$ в направлении $[O_1O_2)$. Докажем, что это действительно так.

Пусть h — произвольный луч. Образом его при центральной симметрии Z_{O_1} является луч h_1, противоположно направленный лучу h. Образом луча h_1 при центральной симметрии Z_{O_2} является луч h_2, противоположно направленный лучу h_1. Значит, $h \uparrow\downarrow h_1$ и $h_1 \uparrow\downarrow h_2$. Поэтому, $h \uparrow\uparrow h_2$*.

Следовательно, образом любого луча h при перемещении $Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ является сонаправленный ему луч h_2. А такое перемещение есть параллельный перенос (теорема 2). Значит, $Z_{O_2} \circ Z_{O_1} = T$.

2) Докажем, что $S_p \circ S_q$, если p и q не перпендикулярны и $p \cap q = O$, есть поворот с центром в точке O на угол, равный удвоенному углу между прямыми p и q (рис. 9).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Построим ее образ при осевой симметрии S_q:

$$M_1 = S_q (M).$$

Затем построим

$$M_2 = S_p (M_1).$$

По определению композиции перемещений точка M_2 есть образ точки M при композиции $S_p \circ S_q$:

$$M_2 = S_p (S_q (M)).$$

Каким перемещением является композиция $S_p \circ S_q$?

$\widehat{1} = \widehat{2}$, как величины углов, симметричных относительно оси q.

$\widehat{3} = \widehat{4}$, как величины углов, симметричных относительно оси p.

Значит, $\widehat{1} + \widehat{4} = \widehat{2} + \widehat{3} = (\widehat{q, p})$.

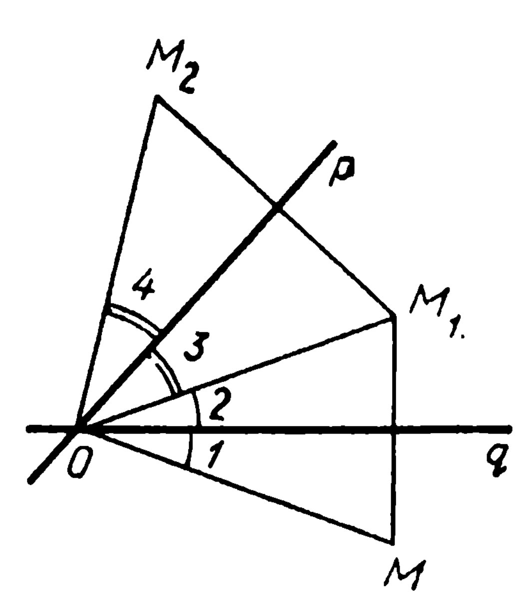


Рис. 9

---

* Доказательство транзитивности отношения сонаправленности лучей не входит в программу средней школы. Доказательство можно найти в книге А. М. Абрамова «Логические основы курса геометрии восьмилетней школы».

Поэтому, $\widehat{MOM_2} = 2\,(\widehat{q, p})$*. (1)

$|MO| = |M_1O|$, как длины отрезков, симметричных относительно оси q.

$|M_1O| = |M_2O|$, как длины отрезков, симметричных относительно оси p.

Значит, $|MO| = |M_2O|$. (2)

Найдем образ точки O при композиции $S_p \circ S_q$,

$$S_q(O) = O, \text{ так как } O \in q.$$

$S_p(S_q(O)) = S_p(O) = O$, так как $O \in p$. Значит,

$$S_p(S_q(O)) = O. \qquad (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) приводят к заключению, что точка M_2 является образом точки M при повороте с центром O и углом поворота $\alpha = 2\,(\widehat{q, p})$.

Для доказательства следующей общей теоремы сформулируем аксиому перемещений.

А к с и о м а. **Существует единственное перемещение, отображающее данный луч OA и примыкающую к нему полуплоскость α на данный луч O_1A_1 и примыкающую к нему полуплоскость α_1.**

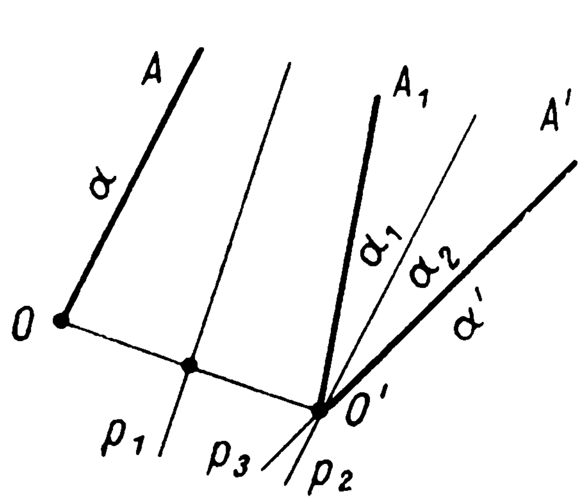
Т е о р е м а 8. **Любое перемещение можно представить композицией двух или трех осевых симметрий.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано перемещение F, отображающее луч OA и полуплоскость α на луч $O'A'$ и полуплоскость α'. Требуется доказать, что найдутся такие осевые симметрии — две или три, — что их композиция и будет перемещением F.

По аксиоме перемещений существует единственное перемещение, отображающее луч OA и полуплоскость α на луч $O'A'$ и полуплоскость α'. Значит, для доказательства теоремы достаточно найти такие осевые симметрии (две или три), что их композиция отобразит луч OA и полуплоскость α на луч $O'A'$ и полуплоскость α'.

Рассмотрим доказательство для случая, когда лучи OA и $O'A'$ различны и не являются симметричными относительно какой-либо оси (рис. 10).

Построим серединный перпендикуляр p_1 отрезка OO'. Осевая симметрия S_{p_1} отобразит луч OA и полуплоскость α на луч $O'A_1$ и полуплоскость α_1.



Р и с. 10

Обозначим через p_2 прямую, содержащую биссектрису угла $A_1O'A'$. Осевая симметрия S_{p_2} отобразит луч $O'A_1$ и полуплоскость α_1 на луч $O'A'$ и полуплоскость α_2.

Обозначим через p_3 прямую, содержащую луч $O'A'$. Осевая сим-

---

* Для полного доказательства равенства (1) следовало бы рассмотреть различные случаи расположения точки M.

метрия S_{p_3} отобразит луч $O'A'$ и полуплоскость α_2 на луч $O'A'$ и полуплоскость α'.

Композиция $S_{p_3} \circ S_{p_2} \circ S_{p_1}$ отобразит луч OA и полуплоскость α на луч $O'A'$ и полуплоскость α'. Следовательно, $F = S_{p_3} \circ S_{p_2} \circ S_{p_1}$. Теорема для рассматриваемого случая доказана. Для других случаев расположения данных лучей и полуплоскостей доказательства аналогичны проведенному.

Отметим, что осевую симметрию S_p можно получить композицией $S_p \circ S_p \circ S_p$. Действительно, $S_p \circ S_p = E$, $S_p \circ E = S_p$. Значит, $S_p = S_p \circ S_p \circ S_p$.

Если бы полуплоскость α' была выбрана так, что совпала бы с полуплоскостью α_2, то перемещение F было бы представлено композицией первых двух осевых симметрий.

Итак, любое перемещение есть композиция двух или трех осевых симметрий.

5. ГОМОТЕТИЯ

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является такая точка X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначают H_O^k.

Отметим два частных случая. При гомотетии с коэффициентом 1 каждая точка отображается на себя. Значит, тождественное отображение может рассматриваться как гомотетия с любым центром и коэффициентом $k = 1$. При гомотетии с центром O и коэффициентом -1 каждая точка X отображается на точку X_1, для которой $\overrightarrow{OX_1} = -\overrightarrow{OX}$, т. е. на точку, центрально-симметричную точке X. Значит, гомотетия с коэффициентом -1 есть центральная симметрия: $H_O^{-1} = Z_O$.

Теорема 9. **Гомотетия имеет обратное отображение. Это обратное отображение тоже есть гомотетия.**

Доказательство. В самом деле, $H_O^k(X) = X_1$ (1)

обозначает, что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$. (2)

Из равенства (2) следует, что $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OX_1}$, (3)

а это означает, что $X = H_O^{\frac{1}{k}}(X_1)$. (4)

Следовательно, обратным отображением к гомотетии с коэффициентом k является гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k' = \frac{1}{k}$.

Если фигура Φ отображается при гомотетии на фигуру Φ_1, то говорят, что фигура Φ_1 гомотетична фигуре Φ. Из доказанной только что теоремы следует, что если фигура Φ_1 гомотетична фигуре Φ, то и фигура Φ гомотетична фигуре Φ_1.

Гомотетия обладает следующими свойствами:

1. Центр гомотетии отображается на себя, так как при умножении нулевого вектора $\overrightarrow{OO}$ на любое число k получится также нулевой вектор

$$\overrightarrow{OO} = k \cdot \overrightarrow{OO}.$$

2. Если $k > 0$, то точки X и $X_1 = H_O^k(X)$ лежат на прямой OX по одну сторону от центра гомотетии (так как векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$ будут сонаправлены).

Если $k < 0$, то точки X и $X_1 = H_O^k(X)$ лежат на прямой OX по разные стороны от центра гомотетии (так как векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$ противоположно направлены).

3. Свойство 3 сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 10. **Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и Y отображаются на точки X_1 и Y_1, то $\overrightarrow{X_1Y_1} = k \cdot \overrightarrow{XY}$.**

Доказательство. Для любых трех точек O, X_1, Y_1 по правилу треугольника для сложения векторов имеет место равенство $\overrightarrow{OY_1} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{X_1Y_1}$. Поэтому $\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{OY_1} - \overrightarrow{OX_1}$. По определению гомотетии $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY_1} = k \cdot \overrightarrow{OY}$. Значит, $\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{OY_1} - \overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OY} - k \cdot \overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k \cdot \overrightarrow{XY}$, что и требовалось доказать.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. При гомотетии с коэффициентом k все расстояния между точками умножаются на $|k|$. $|X_1Y_1| = |k| \cdot |XY|$.

Следствие 2. Гомотетичные фигуры подобны*.

При гомотетии с коэффициентом k из фигуры Φ получается фигура Φ_1, подобная Φ с коэффициентом $|k|$.

Замечание. Теперь доказано существование отображений, при которых фигура отображается на подобную ей фигуру.

Следствие 3. При гомотетии с положительным коэффициентом каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч (рис. 11).

При гомотетии с отрицательным коэффициентом каждый луч отображается на противоположно направленный с ним луч (рис. 12).

Из следствия 3 вытекает, что при гомотетии прямая отображается на параллельную ей прямую, отрезок — на параллельный ему отрезок, угол — на конгруэнтный ему угол.

Для задания гомотетии достаточно задать центр гомотетии и одну пару соответственных точек $A \to A_1$, лежащих на одной прямой с центром O (рис. 13). Тогда для любой точки плоскости можно

---

* Фигура Φ_1 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k, если фигуру Φ можно отобразить на фигуру Φ_1 так, что расстояния между точками фигуры Φ умножаются на положительное число k.

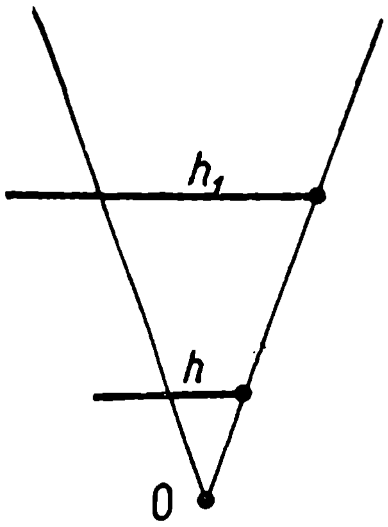


Рис. 11

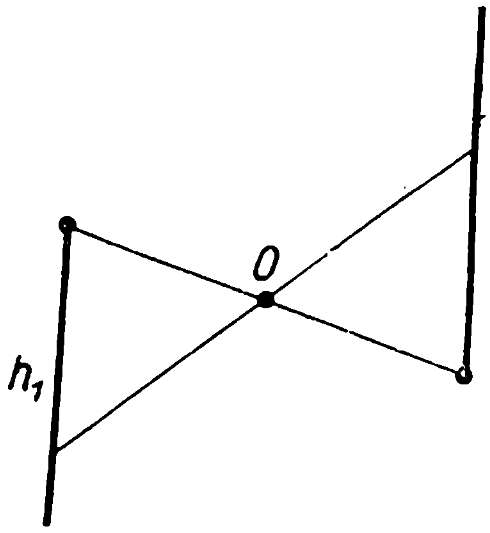


Рис. 12

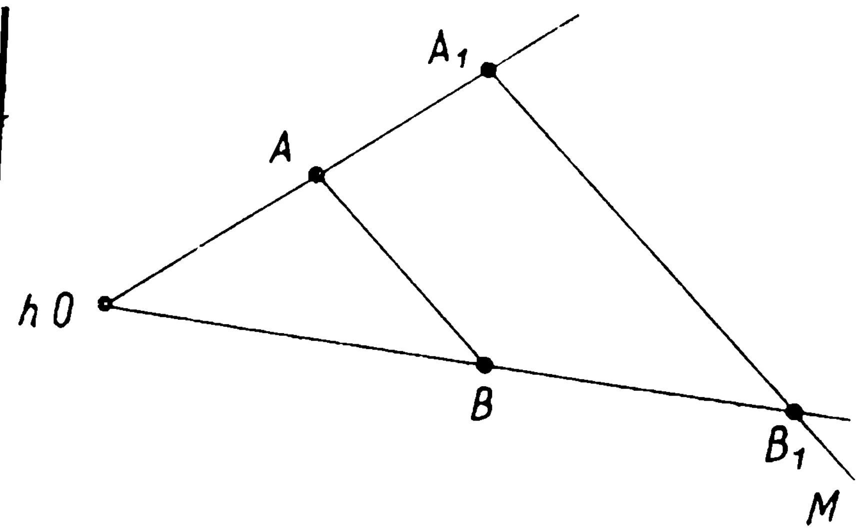


Рис. 13

построить ее образ. Действительно, пусть дана произвольная точка B. Проведем прямые OB и AB. Затем проведем прямую A_1M, параллельную прямой AB. Тогда точка $B_1 = [A_1M) \cap [OB)$ будет образом точки B при заданной гомотетии (так как прямая AB при гомотетии должна перейти в параллельную ей прямую).

В рассмотренном случае построения гомотетичных точек коэффициент гомотетии k был задан отрезками OA_1 и OA. Модуль коэффициента k равен отношению длин отрезков OA_1 и OA. А его знак определяется расположением точек A и A_1 относительно центра гомотетии O. Если точка O лежит между точками A и A_1, то $k < 0$; в противном случае $k > 0$.

Указанным способом удобно строить многоугольники, гомотетичные данным. Для этого достаточно построить точки, гомотетичные вершинам данного многоугольника (рис. 14).

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Гомотетия и перемещение являются отображениями плоскости на себя. Композиция гомотетии и перемещения тоже есть некоторое отображение плоскости на себя.

При гомотетии с коэффициентом k расстояния умножаются на $|k|$. При перемещении они сохраняются. Значит, при композиции гомотетии и перемещения все расстояния умножаются на $|k|$. Но такая композиция не всегда является гомотетией. Например, композиция гомотетии H_O^k и поворота $R_{A_1}^{\alpha}$ (рис. 15) отображает пря-

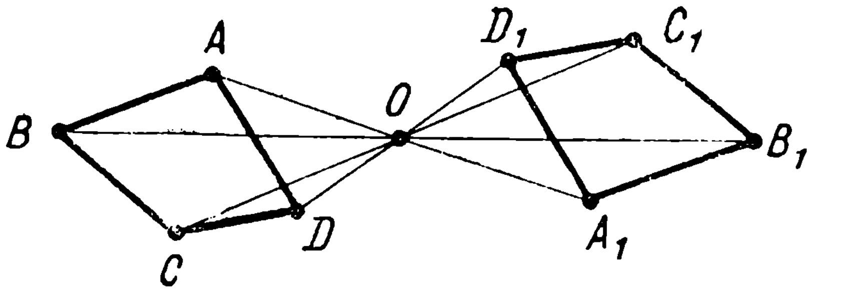


Рис. 14

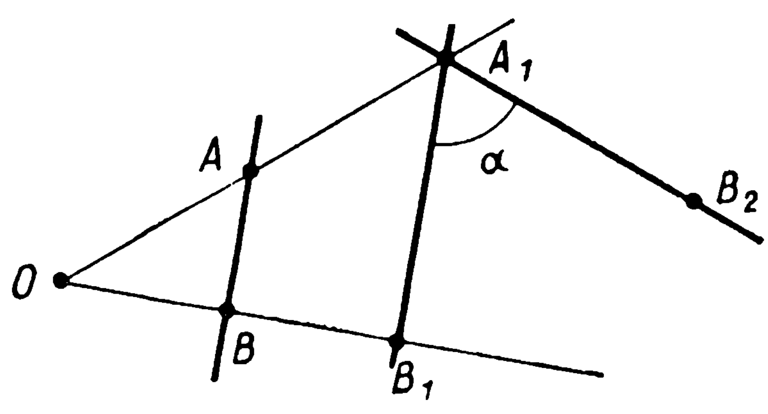


Рис. 15

мую AB на не параллельную ей прямую A_1B_2. Следовательно, эта композиция не является гомотетией, так как на странице 18 указано, что при гомотетии прямая отображается на параллельную прямую.

Итак, существуют отображения плоскости на себя, отличные от гомотетии, при которых расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число.

Отображение плоскости на себя, при котором расстояния между любыми двумя точками умножаются на одно и то же положительное число k, называется преобразованием подобия. Число k называется коэффициентом преобразования подобия.

Преобразование подобия отображает любую фигуру Ф на подобную ей фигуру $Ф_1$, так как при этом расстояния между любыми точками умножаются на одно и то же положительное число — коэффициент преобразования подобия.

Верно и обратное: если фигура $Ф_1$ подобна фигуре Ф, то существует преобразование подобия, отображающее фигуру Ф на фигуру $Ф_1$. Поэтому можно дать и такое определение подобных фигур: фигура $Ф_1$ подобна фигуре Ф, если существует преобразование подобия, отображающее фигуру Ф на фигуру $Ф_1$.

Рассмотрим некоторые свойства преобразований подобия:

1. Преобразование подобия с коэффициентом k имеет обратное. Это обратное есть преобразование подобия с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Действительно, пусть A и B — различные точки плоскости, A_1 и B_1 — их образы. Тогда $|A_1B_1| = k\,|AB| \neq 0$. Следовательно, $A_1 \neq B_1$, и поэтому преобразование подобия обратимо. При обратном преобразовании точки A_1 и B_1 отображаются на точки A и B. Но $|AB| = \frac{1}{k}\,|A_1B_1|$. Значит, это обратное отображение есть преобразование подобия с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

2. Композиция двух преобразований подобия P_1 и P_2 с коэффициентами k_1 и k_2 есть также преобразование подобия с коэффициентом $k = k_1 \cdot k_2$. В самом деле, при преобразовании P_1 расстояния умножаются на $k_1 > 0$, а при преобразовании P_2 — на $k_2 > 0$. Тогда при композиции $P_2 \circ P_1$ расстояния будут умножены на $k = k_1 \cdot k_2 \neq 0$. Значит, $P_2 \circ P_1$ есть преобразование подобия с коэффициентом

$$k = k_1 \cdot k_2.$$

В частности, **композиция гомотетии с коэффициентом k и перемещения есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $|k|$.**

Оказывается, для последнего высказывания верно и обратное:

Теорема 11. **Каждое преобразование подобия есть композиция гомотетии и перемещения.**

Доказательство. Пусть P — преобразование подобия с коэффициентом k. Пусть X — произвольная точка плоскости, $X_1 = P(X)$.

Рассмотрим гомотетию H_O^k с произвольно выбранным центром O и коэффициентом, равным коэффициенту k данного преобразования P. Пусть $H_O^k(X) = X_2$. Обратным отображением к гомотетии H_O^k является гомотетия с тем же центром O, но с коэффициентом $\frac{1}{k}$ — гомотетия $H_O^{\frac{1}{k}}$. Тогда $H_O^{\frac{1}{k}}(X_2) = X$.

Рассмотрим композицию $P \circ H_O^{\frac{1}{k}}$. Обозначим ее через F. Тогда $F(X_2) = P(H_O^{\frac{1}{k}}(X_2)) = P(X) = X_1$.

Отображение F есть подобие с коэффициентом, равным $\frac{1}{k} \cdot k = 1$.

Значит, F есть перемещение.

Рассмотрим композицию $F \circ H$.

$$(F \circ H)(X) = F(X_2) = X_1.$$

Итак, $P(X) = X_1$ и $(F \circ H)(X) = X_1$. Следовательно $P = F \circ H$, что и требовалось доказать.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Говоря о преобразованиях пространства, можно во многих случаях повторять те определения и теоремы, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Это относится к определениям отображения, перемещения, конгруэнтности фигур, преобразований подобия, композиций отображений. Во всех этих случаях следует просто вместо множества точек плоскости рассматривать множество точек пространства. Однако свойства отдельных преобразований для пространства отличаются от свойств этих преобразований для плоскости.

В старших классах мы пользуемся таким определением преобразования пространства:

Отображение пространства на себя, при котором любые две различные точки имеют различные образы, называется преобразованием пространства.

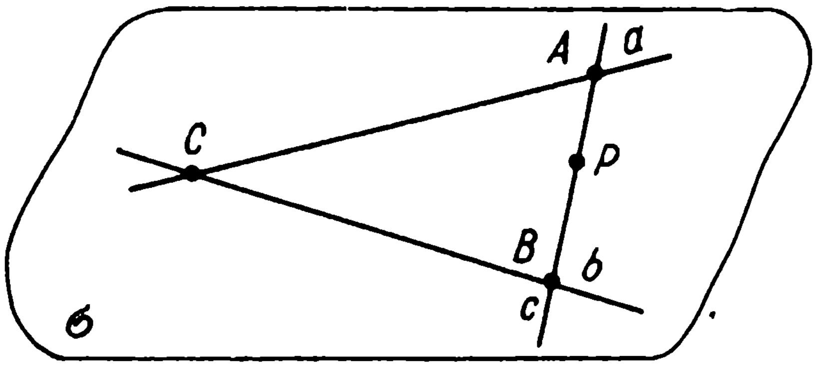
В последующих разделах мы будем знакомиться с различными видами преобразований пространства. При рассмотрении свойств этих преобразований нам понадобятся некоторые понятия, которых нет в школьных учебниках, поэтому введем их здесь.

Преобразование называют коллинеацией, если оно отображает прямую на прямую, причем сохраняется взаимная принадлежность (инцидентность) точек и прямых.

При коллинеации имеет место следующее свойство:

Коллинеация отображает плоскость на плоскость.

В самом деле, пусть прямые a и b пересекаются в точке C и принадлежат плоскости σ (рис. 16). Путем коллинеации f прямые



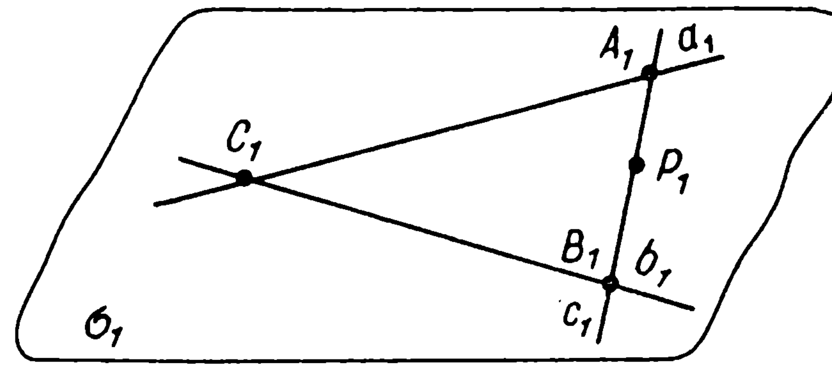


Рис. 16

a, b и точка C отображаются соответственно на прямые a_1, b_1 и точку их пересечения C_1. Для доказательства того, что плоскость σ отображается на плоскость σ_1, определяемую прямыми a_1 и b_1, возьмем произвольную точку P, принадлежащую плоскости σ. Проведем прямую c, пересекающую прямые a и b в точках A и B.

Прямая c отображается на прямую c_1. Она пересекает прямые a и b в точках A_1 и B_1, а точка P отображается на P_1 прямой c_1, поэтому $P_1 \in \sigma_1$. Следовательно, все точки плоскости σ отображаются на точки плоскости σ_1, т. е. плоскость σ отображается на плоскость σ_1.

Пусть G — множество преобразований плоскости или пространства. Те свойства фигуры Φ, которые сохраняются при всех преобразованиях $f \in G$, называются инвариантными свойствами этой фигуры относительно G или, короче, инвариантами множества G.

Так, расстояния $|AB|$ между двумя точками A и B — инвариантное свойство фигуры $\{A, B\}$ относительно множества перемещений.

Свойства фигуры быть отрезком, лучом, прямой, отношение «лежать между», величина угла, площадь фигуры и т. д. — все это примеры инвариантных свойств фигур относительно множества перемещений.

Особую роль в теории преобразований играют так называемые неподвижные элементы.

Точка M является неподвижной точкой перемещения F, если $F(M) = M$. При рассмотрении перемещений плоскости мы обращали внимание на наличие у различных видов перемещений того или иного числа неподвижных точек или прямых. В дальнейшем при изучении преобразований пространства мы будем также говорить об неподвижных плоскостях.

Среди преобразований имеются такие, которые совпадают со своими обратными, но не являются тождественными ($f = f^{-1}$, $f \neq E$). Это значит, что если преобразование f отображает точку A на точку A_1, то это же преобразование отображает точку A_1 на точку A, т. е. если $f(A) = A_1$, то $f(A_1) = A$. Такие преобразования называют *инволюционными* или *инволюцией*. F — инволюция, если $F \circ F = E$. Например, осевая и центральная симметрии на плоскости являются инволюционными преобразованиями, а поворот не является таковым, если $\alpha \neq \pi k$.

Рассмотрим еще одно важное свойство перемещений. Перемещения плоскости и пространства подразделяются на собственные и зеркальные, иногда их называют перемещениями 1-го и 2-го рода. Эти свойства тесно связаны с понятием ориентации.

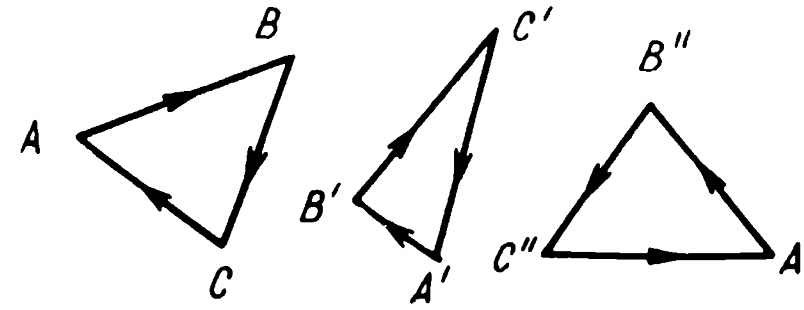


Рис. 17

Наглядный смысл понятия «ориентация» заключается в сравнении двух фигур, границам которых приписано определенное направление обхода. Так (рис. 17), о треугольниках ABC и $A'B'C'$ говорят, что они одинаково ориентированы, так как в обоих случаях обход контуров этих треугольников совершается в одном и том же направлении (по часовой стрелке). Треугольники же ABC и $A''B''C''$ ориентированы противоположно.

С понятием ориентации приходится сталкиваться при отсчете углов, измерении площадей, ограниченных сложными контурами, а также в ряде других вопросов. Ниже дается определение понятия ориентации.

Ориентированным треугольником называется упорядоченная тройка точек (вершины треугольника), не лежащих на одной прямой, т. е. тройка точек, для которой указано, какая из точек считается первой, какая — второй и какая — третьей.

При обозначении ориентированного треугольника порядок его вершин определяется порядком их записи.

Цепью треугольников, соединяющих ориентированный треугольник ABC с ориентированным треугольником $A'B'C'$, называется такая конечная последовательность ориентированных треугольников, что каждые два соседних треугольника этой последовательности отличаются либо только порядком вершин, либо только одной вершиной, имеющей в обоих треугольниках один и тот же номер. Первым элементом этой последовательности является треугольник ABC, последним — треугольник $A'B'C'$.

Теорема 12. **Любые два ориентированных треугольника ABC и $A'B'C'$ можно соединить цепью.**

Доказательство. Искомая цепь: ABC, ABQ, APQ, $A'PQ$, $A'PB'$, $A'B'P$, $A'B'C'$, где Q — любая точка, не принадлежащая прямым AB и $A'B'$, а P — какая-нибудь точка, не принадлежащая прямым AQ и $A'Q$ (рис. 18).

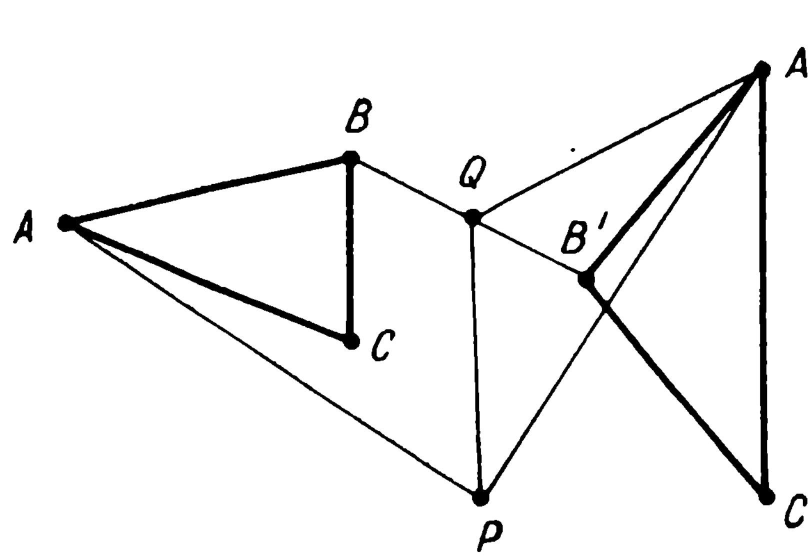


Рис. 18

Будем говорить, что два ориентированных треугольника с одними и теми же вершинами имеют одинаковый обход, если вершины второго треугольника получаются круговой перестановкой вершин первого треугольника. Если же вершины второго треугольника не могут быть получены круговой перестановкой вершин первого, то будем говорить, что эти треугольники имеют противоположный обход.

Таким образом, треугольники ABC, BCA и CAB имеют одинаковый обход; треугольники ABC, CBA и BAC также имеют одинаковый обход, а каждый из них с любым из треугольников ACB, BCA и CAB имеют противоположный обход.

Будем говорить, что два ориентированных треугольника, отличающиеся только одной вершиной, занимающей в обоих треугольниках одно и то же место, имеют одинаковый обход, если эти вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей общие вершины треугольников. В противном случае будем говорить, что треугольники имеют противоположный обход. Так, например, если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то треугольники ABC и ABD имеют одинаковый обход. Если же точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то треугольники ABC и ABD имеют противоположный обход (рис. 19).

Если в цепи, соединяющей ориентированный треугольник ABC с ориентированным треугольником $A'B'C'$, число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, четно, то говорят, что ориен-

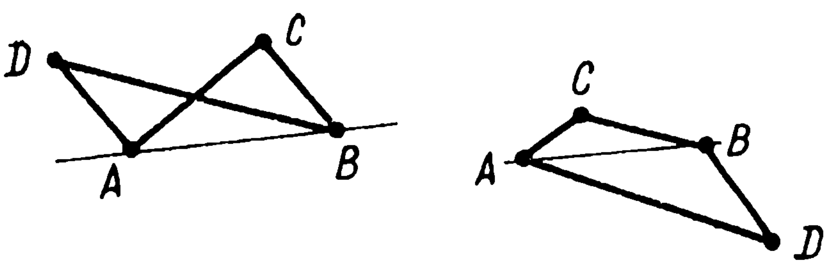


Рис. 19

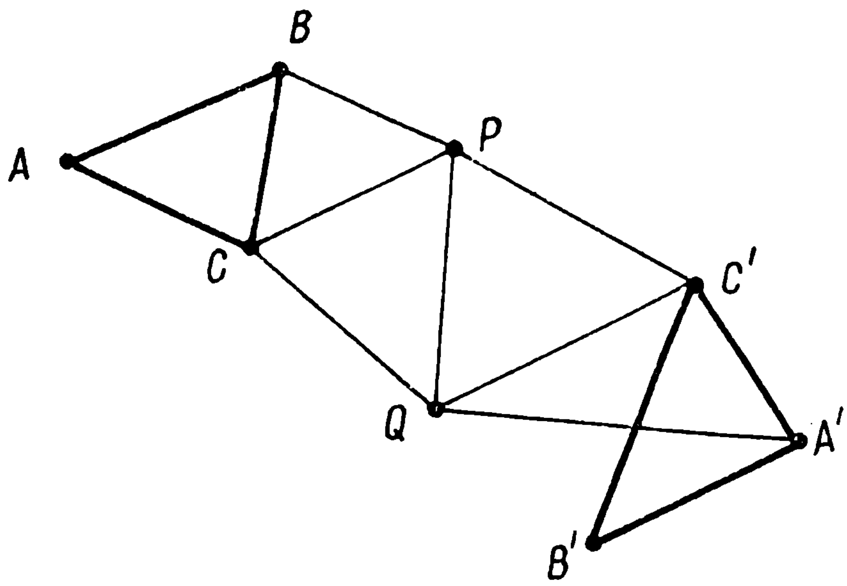


Рис. 20

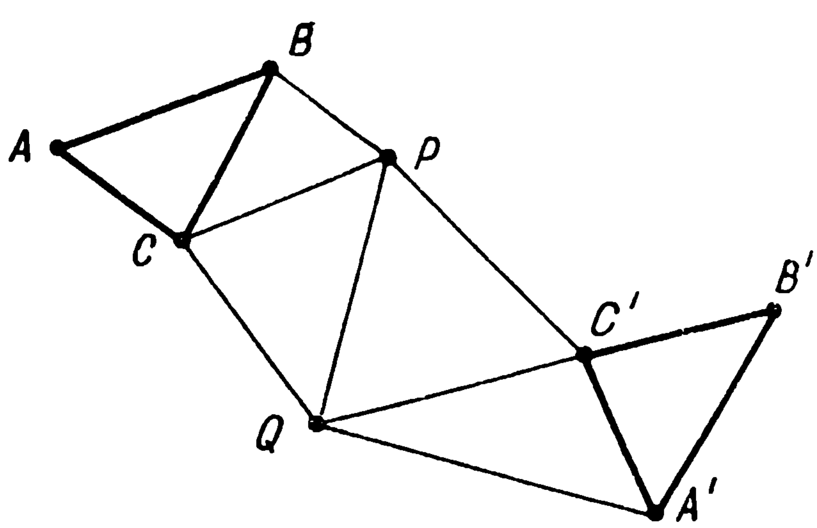


Рис. 21

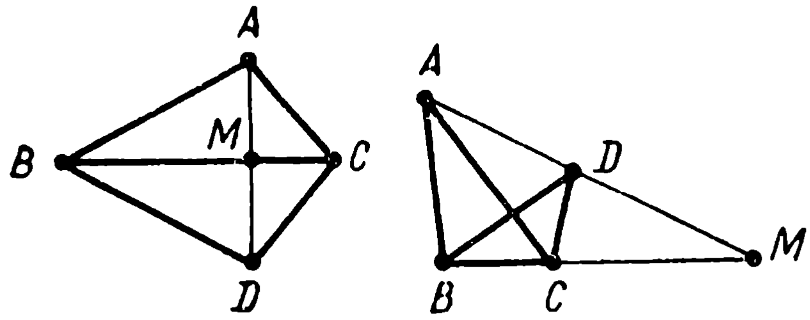


Рис. 22

тированные треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию (рис. 20); если же это число нечетно, то говорят, что ориентированные треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют противоположную ориентацию (рис. 21). Можно иначе подойти к понятию «ориентация».

Ориентация треугольников ABC и DBC является различной или одинаковой, в зависимости от того, пересекает ли отрезок AD прямую BC или нет (рис. 22). Но если перемещение отображает треугольники ABC и DBC на треугольники $A_1B_1C_1$ и $D_1B_1C_1$, то отрезок A_1D_1 пересекает прямую B_1C_1 (т. е. $|AD| > |A_1M_1|$, где M_1 — точка пересечения $[A_1D_1]$ и $[B_1C_1]$) в том и только том случае, когда отрезок AD пересекает прямую BC (т. е. когда $|AD| > |AM|$, где M точка пересечения $[AD]$ и $[BC]$, поэтому, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы одинаково (различно), то и треугольники DBC и $D_1B_1C_1$ ориентированы одинаково (различно).

Перемещение является *собственным*, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы одинаково, и *зеркальным* — в противном случае.

Говоря о композициях перемещений, отметим, что композиция двух зеркальных перемещений является собственным перемещением, тождественное отображение также является собственным перемещением (докажите самостоятельно).

Можно доказать такую теорему:

Любой данный отрезок AB можно отобразить на конгруэнтный ему отрезок A_1B_1 в точности двумя перемещениями: одним собственным и одним зеркальным (проведите доказательство самостоятельно).

Можно говорить об ориентации и пространственных фигур. Наглядное представление об этом обычно дают следующие рассуждения.

Две пространственные фигуры являются *одинаково ориентированными*, если любые четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, первой фигуры Ф и соответствующие им точки A', B', C', D' второй фигуры (рис. 23) расположены так, что для наблюдателя, смотрящего из точек D и D' соответственно на треугольники ABC и $A'B'C'$, ориентация треугольников будет одинаковой.

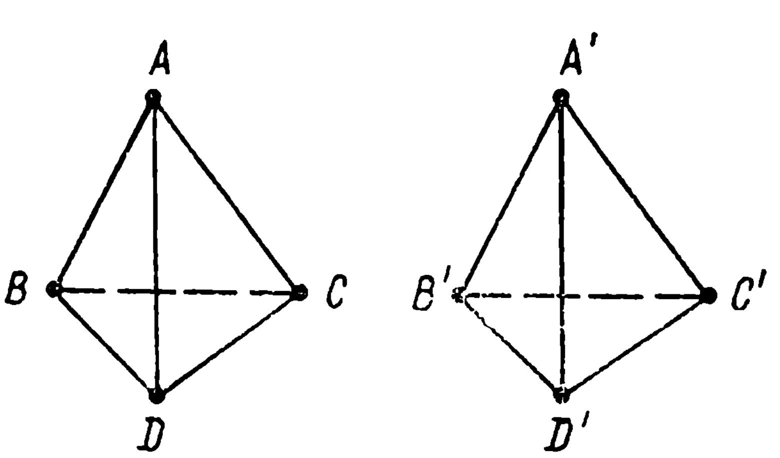


Рис. 23

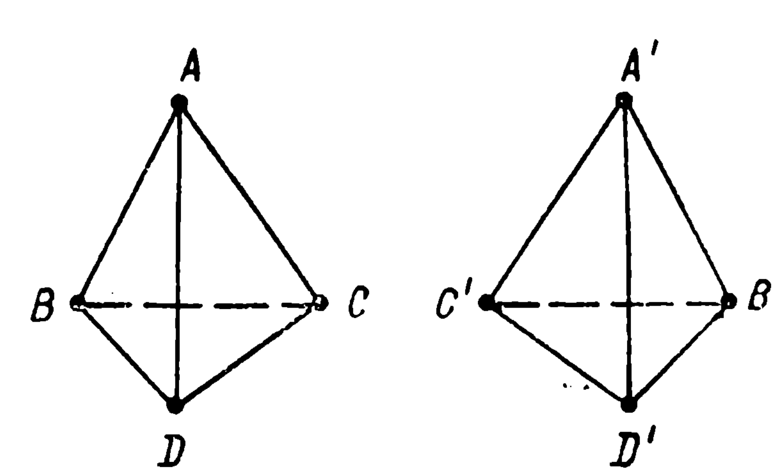


Рис. 24

Фигуры являются *противоположно ориентированными* (рис. 24), если для наблюдателя, смотрящего из точек D и D_1 на треугольники ABC и $A'B'C'$, их ориентация будет противоположной. Понятия собственного и зеркального перемещения для пространства совпадают с соответствующими понятиями в планиметрии.

Если при каком-либо перемещении произвольный тетраэдр отображается на одинаково ориентированный с ним тетраэдр, то это перемещение пространства является *собственным*, если же тетраэдр отображается на противоположно ориентированный с ним тетраэдр, то такое перемещение *зеркальное*.

Завершая разговор о перемещениях плоскости следует рассмотреть еще один вид перемещений — **скользящую симметрию.** При определении этого вида перемещений мы пользуемся понятием композиции перемещений. Именно это обстоятельство не позволило рассматривать это перемещение в пункте 1.

Если вектор $\vec{a}$ параллелен прямой p, то перемещение $\vec{a} \circ S_p$ называется скользящей симметрией. Считая нулевой вектор параллельным любой прямой будем считать обыкновенную осевую симметрию частным случаем скользящей симметрии.

ГЛАВА I
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ПОНЯТИЕ СИММЕТРИИ

Слово «симметрия» происходит от греческого слова «соразмерность» (συμ — со, μετρία — мерить, измерить).

В природе, быту, технике, прикладном искусстве мы часто встречаемся с симметрией. Мы говорим о симметричности и несимметричности здания, удивляемся и восхищаемся симметрией снежинки, морской звезды, мы говорим даже о симметрии музыкального произведения.

Понятие о симметрии составляет одну из составных частей нашего понятия о красоте.

Изучение археологических памятников показывает, что человечество на заре своей культуры уже имело представление о симметрии и осуществляло ее в рисунке и в предметах быта.

Надо полагать, что применение симметрии в первобытном производстве определялось не только эстетическими мотивами, но в известной мере и уверенностью человека в большей пригодности симметричных форм, чем асимметричных. Уверенность эта продолжает существовать и до сих пор, находя себе отражение во многих областях человеческой деятельности.

Таким образом, термин «симметрия», как и ряд других терминов геометрии (например, «преобразование»), употребляется в двух смыслах:

а) симметрия — как слово обиходное обозначает правильность формы тела, одинаковость его размеров в разных направлениях. Это понятие важно, так как находит себе применение при создании разного рода машин, деталей, одежды, мебели, кристаллов и т. д.;

б) симметрия — отображение точек плоскости или пространства на себя, при котором образы точек находятся по некоторому правилу. Именно такие симметрии и будут являться предметом нашего рассмотрения, к симметриям мы будем сводить и другие виды преобразований.

Говоря о преобразованиях пространства мы рассматриваем три вида симметрии: симметрия относительно точки, относительно прямой, относительно плоскости. К их рассмотрению мы и переходим

§ 2. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ (ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПЛОСКОСТИ)

Преобразование, с которого мы начинаем изучение преобразований пространства, является отражением от плоскости или симметрией относительно плоскости*. Как мы увидим позднее, существует много преобразований, которые всегда могут быть представлены в виде композиции того или иного числа отражений от плоскости. Рассмотрев свойства отражений от плоскости, мы облегчим себе задачу рассмотрения свойств других преобразований.

*Отражением от плоскости*** σ *называется преобразование, при котором любая точка A пространства отображается на точку* A_1, *причем*:

$$1)\ [AA_1] \perp \sigma,\ 2)\ |OA_1| = |OA|,$$

где O — точка пересечения отрезка AA_1 *с плоскостью* σ.

В соответствии с принятыми нами обозначениями отражение от плоскости можно записать в виде:

$$A_1 = S_\sigma(A).$$

Отметим основные свойства отражения от плоскости:

1. Отражение от плоскости есть преобразование инволюционное.

Это следует из определения.

Если $S_\sigma(A) = A_1$, то $S_\sigma(A_1) = A$.

Этот факт можно записать так:

$$S_\sigma(S_\sigma(A)) = A,$$

а это означает, что преобразование $S_\sigma \circ S_\sigma$ является тождественным, т. е. $S_\sigma \circ S_\sigma = E$.

2. Точки, лежащие в плоскости σ, являются неподвижными (рис. 25), т. е.

если $M \in \sigma$, то $S_\sigma(M) = M$; обратно:

если $S_\sigma(M) = M$, то $M \in \sigma$.

Это свойство также следует из определения.

3. При симметрии относительно плоскости прямая отображается на прямую,

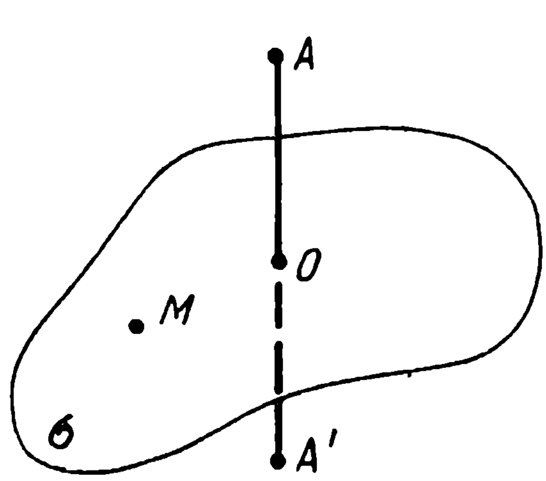


Рис. 25

* При доказательстве свойств используются признаки параллельности прямой и плоскости, свойства перпендикуляра к плоскости (единственность перпендикуляра), доказательство которых имеется в учебном пособии по геометрии для IX класса.

** В учебном пособии по геометрии для IX класса дается следующее определение: преобразование пространства, при котором каждая точка отображается на симметричную ей точку относительно заданной плоскости, называется симметрией относительно этой плоскости.

причем точка пересечения данной прямой и плоскости симметрии (если она есть) отображается сама на себя.

Пусть мы имеем прямую n, которая отражается относительно плоскости σ. Рассмотрим различные случаи взаимного расположения прямой n и плоскости σ:

а) Прямая, перпендикулярная к плоскости симметрии, отображается сама на себя (рис. 26).

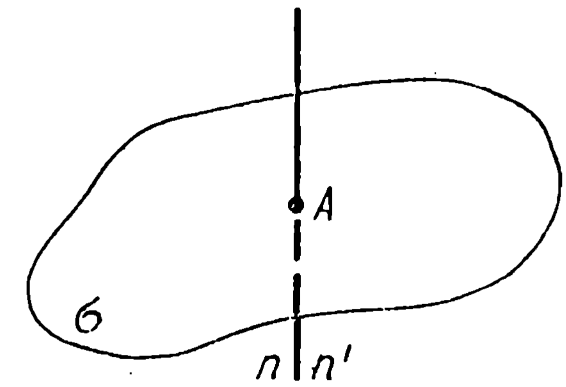


Рис. 26

В самом деле, пусть прямая n перпендикулярна к плоскости σ, $n \cap \sigma = A$, причем $S_\sigma(A) = A$, $S_\sigma(n) = n'$. В силу единственности перпендикуляра к плоскости σ, проходящего через данную точку, имеем $n \perp \sigma$ и $n' = n$.

б) Пусть n не перпендикулярна к плоскости σ и $n \cap \sigma = O$ (рис. 27).

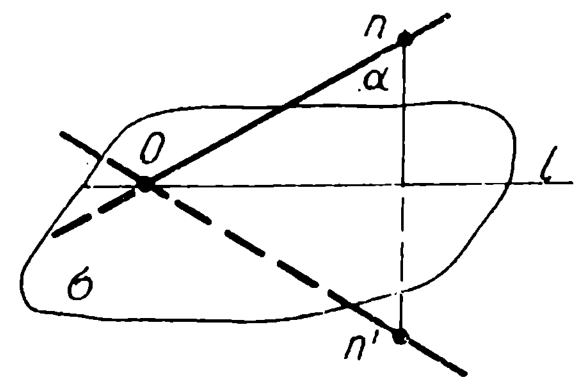


Рис. 27

Находим точки, симметричные точкам прямой n относительно плоскости σ. Для этого через любую точку прямой n проводим перпендикуляр к плоскости σ, через прямую n и построенный перпендикуляр проведем плоскость α. Замечаем, что $\alpha \perp \sigma$. Плоскость α пересекает плоскость σ по прямой l, которая является проекцией прямой n на плоскости σ.

Построение симметричных точек теперь будет происходить в плоскости α относительно оси l. Так как $S_l(n) = n'$, то $S_\sigma(n) = n'$ и обратно: $S_\sigma(n') = n$, точка $O = n \cap n'$ отобразится сама на себя, т. е. $S_\sigma(O) = O$, следовательно, $O \in \sigma$.

в) Прямая n не пересекает плоскость σ, т. е. $n \parallel \sigma$. Как и в предыдущем случае, проведем через прямую n плоскость α перпендикулярно к плоскости σ, получим линию пересечения l плоскостей σ и α. Таким образом, мы опять свели дело к осевой симметрии в плоскости α. Следовательно, прямая n отображается на прямую n'; при этом можем записать: $S_\sigma(n) = n'$. Кроме того, так как $n \parallel \sigma$, то $n \parallel l$ и $n' \parallel l$ и, значит, $n' \parallel \sigma$. Итак, прямая n отображается на прямую n', параллельную плоскости σ (и, конечно, $n \parallel n'$).

4. При отражении от плоскости плоскость отображается на плоскость, причем линия пересечения данной плоскости и ее образа (если он есть) принадлежит плоскости симметрии. Пусть плоскость α не перпендикулярна плоскости σ. Возьмем в плоскости α точку A и проведем через нее в этой плоскости прямые m и n. Пусть $S_\sigma(A) = A_1$, $S_\sigma(m) = m_1$, $S_\sigma(n) = n_1$. Проведем через пересекающиеся прямые m_1 и n_1 плоскость α_1 и покажем, что каждая точка B плоскости α отображается на точку B_1 плоскости α_1. Проведем через точку B прямую p, пересекающую прямые m и n соответственно в точках M и N; $S_\sigma(M) = M_1$, $S_\sigma(N) = N_1$,

$S_\sigma (p) = p_1$, причем $M_1 \in p_1$, $N_1 \in p_1$ и вместе с тем $M_1 \in m_1$, $N_1 \in \in n_1$; следовательно, $M_1 \in \alpha_1$, $N_1 \in \alpha_1$; значит, $p_1 \in \alpha_1$.

Если $B \in p$ и $S_\sigma (B) = B_1$, то $B_1 \in p_1$, т. е. $B_1 \in \alpha_1$. Итак, любая точка плоскости α отображается на точку плоскости α_1. Таким же путем можно доказать, что и любая точка плоскости α_1 отображается на точку плоскости α, поэтому $S_\sigma (\alpha) = \alpha_1$ и, обратно, $S_\sigma (\alpha_1) = \alpha$. Обозначим через l линию пересечения α и α_1, т. е. $\alpha \cap \alpha_1 = l$. Тогда получим $S_\sigma (l) = l$; следовательно, $l \in \sigma$. Если $\alpha \parallel \sigma$, то и $\alpha_1 \parallel \alpha$, т. е. $\alpha \parallel \alpha_1$. Если $\alpha \perp \sigma$, то, очевидно, α отображается сама на себя: $S_\sigma (\alpha) = \alpha$.

5. Теорема 1. **Симметрия относительно плоскости есть перемещение.**

Доказательство смотрите на странице 77 учебного пособия по геометрии для IX класса.

При изучении перемещений пространства мы также имеем дело с конгруэнтными фигурами. В стереометрии мы пользуемся таким определением конгруэнтных фигур:

Фигура Φ_1 *называется конгруэнтной фигуре* Φ, *если существует перемещение, отображающее* Φ *на* Φ_1.

Конгруэнтность фигур обладает следующими свойствами: а) рефлексивностью: $\Phi \cong \Phi$, б) симметричностью: если $\Phi_1 \cong \Phi$, то $\Phi \cong \Phi_1$, в) транзитивностью: если $\Phi \cong \Phi_1$ и $\Phi_1 \cong \Phi_2$, то $\Phi \cong \cong \Phi_2$*.

В зависимости от вида перемещения (собственное или зеркальное) конгруэнтные фигуры называют соответственно собственно-конгруэнтными и несобственно-конгруэнтными.

Теорема 2. **При отражении от плоскости данный тетраэдр отображается на несобственно-конгруэнтный тетраэдр.**

Доказательство. Конгруэнтность тетраэдров следует из теоремы 1 (свойство 5 § 2). Нам следует доказать, что ориентация этих тетраэдров противоположна.

Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B, C тетраэдра принадлежат плоскости отражения σ, а точка D этого тетраэдра не принадлежит плоскости σ. Таким образом, имеем:

$$S_\sigma (A) = A, \; S_\sigma (B) = B, \; S_\sigma (C) = C.$$

Тетраэдру $ABCD$ соответствует тетраэдр $ABCD'$, причем точки D и D' лежат по разные стороны от плоскости. Отсюда следует, что для наблюдателей, находящихся в точках D и D', ориентация треугольника ABC будет противоположной.

Если же точки A, B, C не лежат в плоскости (или не все лежат в плоскости σ) (рис. 28), то продолжим ребра DA, DB, DC до пересечения с плоскостью σ и получим точки A_1, B_1, C_1. Тогда по до-

---

* В учебном пособии по геометрии для VII класса эти свойства доказаны для подобных фигур. Нетрудно, считая $k = 1$, перенести эти свойства доказательства на конгруэнтность фигур.

казанному, тетраэдры $DA_1B_1C_1$ и $DABC$ ориентированы одинаково. Точно так же треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ориентированы одинаково.

Но треугольник $A_1B_1C_1$ различно ориентирован, в зависимости от того, из какой точки — D или D' — мы его наблюдаем. Таким образом, треугольники ABC и $A'B'C'$ ориентированы противоположно.

Точно таким же образом можно рассмотреть самые различные случаи расположения тетраэдра по отношению к плоскости отражения.

Итак, тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ ориентированы противоположно.

От тетраэдров нетрудно перейти к любым другим фигурам. В результате получим, что фигуры, симметричные относительно плоскости, являются несобственно-конгруэнтными.

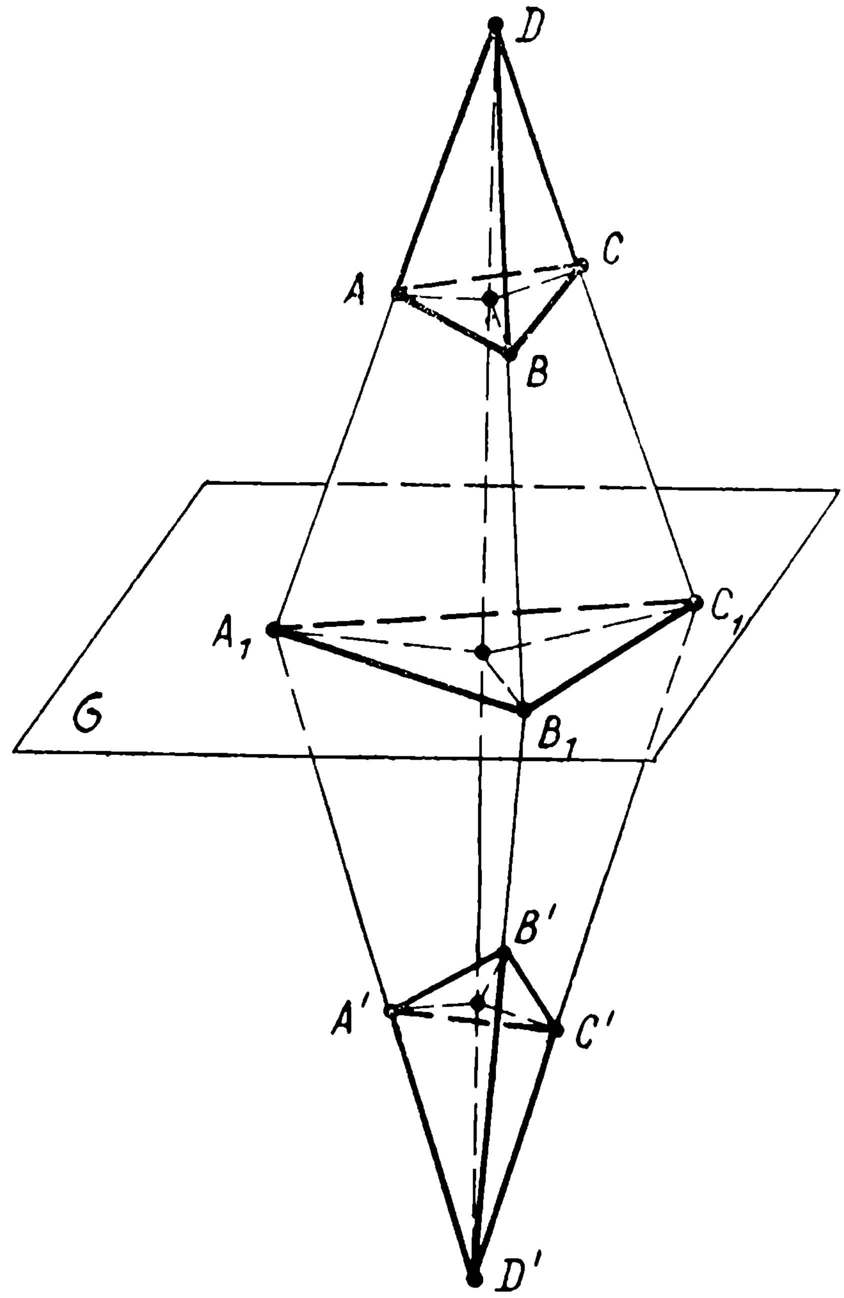


Рис. 28

Чтобы создать ясное представление о конгруэнтных, но противоположно ориентированных фигурах, приведем такой пример. Положим правую руку горизонтально ладонью вниз на стол и поставим рядом перпендикулярно к плоскости стола зеркало, тогда мы отчетливо видим в зеркале «левую руку», что свидетельствует о противоположной ориентации рук. Правая и левая туфля, перчатка также конгруэнтны, но ориентированы противоположно.

В качестве упражнений для формирования понятия ориентации полезно рассмотреть различные случаи расположения тетраэдра $DABC$ относительно плоскости отражения σ и определить ориентацию данного тетраэдра и его образа.

1. Вершины тетраэдра A и B лежат в плоскости σ, а вершины C и D не принадлежат ей, но находятся по одну сторону от нее.

2. Вершина A лежит в плоскости σ, а остальные вершины — B, C и D — не принадлежат ей, но находятся по одну сторону от нее.

3. Все вершины — A, B, C и D — не лежат в плоскости σ, но находятся по разные стороны от нее, при этом очевидно возможны две отличающиеся в принципе комбинации:

а) A лежит по одну сторону σ, а B, C и D — по другую;

б) A и B лежат по одну сторону от σ, а C и D — по другую.

4. Будут ли конгруэнтны фигуры Φ' и Φ и как они будут ориентированы по отношению друг к другу, если фигура Ф′ получается из фигуры Ф путем последовательно проведенных отражений:

а) от двух плоскостей,

б) от трех плоскостей,

в) от четырех плоскостей и т. д.?

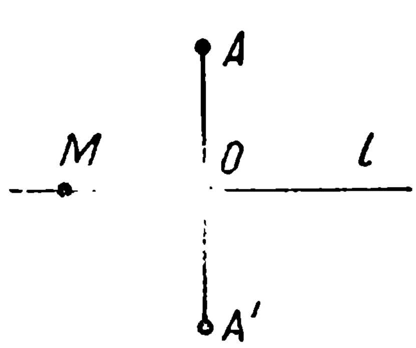
Сделать обобщение на n отражений, где n — натуральное число.

Цель рассмотрения этих случаев не столько в закреплении навыка доказательства, что тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ конгруэнтны и противоположно ориентированы, сколько в развитии конструктивных навыков.

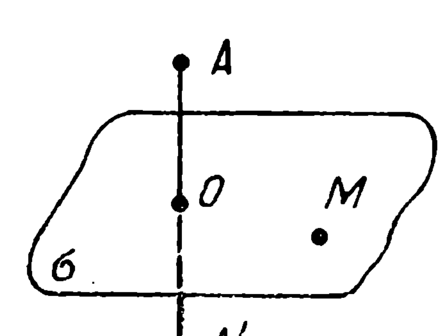
Доказав предложение относительно тетраэдров, надо показать, что если возьмем еще пятую точку, допустим F, то образом многогранника $ABCDF$, при отражении от плоскости σ, является многогранник $A'B'C'D'F'$, конгруэнтный и противоположно ориентированный первому.

Рассматривая отражения от плоскости, мы должны рассмотреть вопрос о том, какие имеются сходства и какие различия между основными свойствами отражения от плоскости и основными свойствами осевой симметрии на плоскости.

Свойства осевой симметрии на плоскости	Свойства отражения от плоскости
1. Неподвижными точками при осевой симметрии являются те и только те точки плоскости, которые принадлежат оси симметрии (рис. 29, *а*). Если $M \in l$, то $S_l(M) = M$. Обратно: если $S_l(M) = M$, то $M \in l$	1. Неподвижными точками в преобразовании отражения от плоскости являются те и только те точки пространства, которые принадлежат плоскости симметрии (рис. 29, *б*). Если $M \in \sigma$, то $S\sigma(M) = M$. Обратно: если $S\sigma(M) = M$, то $M \in \sigma$
2. Ось симметрии перпендикулярна отрезку, соединяющему пару симметричных точек, и делит его пополам (рис. 29, *а*) $[AA'] \cap l = O$, $[AA'] \perp l$. $\lvert AO\rvert = \lvert OA'\rvert$ и т. д.	2. Плоскость отражения перпендикулярна отрезку, соединяющему пару симметричных точек, и делит его пополам (рис. 29, *б*) $[AA'] \perp \sigma$, $[AA'] \cap \sigma = O$. $\lvert AO\rvert = \lvert OA'\rvert$ и т. д.



а)



б)

Рис. 29

Используя основные свойства отражения от плоскости, решим следующие задачи на построение:

5. Имеется плоскость σ и точка A, не принадлежащая плоскости σ. Постройте точку, симметричную данной точке, относительно данной плоскости.

Для того чтобы построить точку A', симметричную точке A относительно плоскости σ, нужно сделать следующие построения:

а) провести произвольную прямую n на плоскости σ (рис. 30);

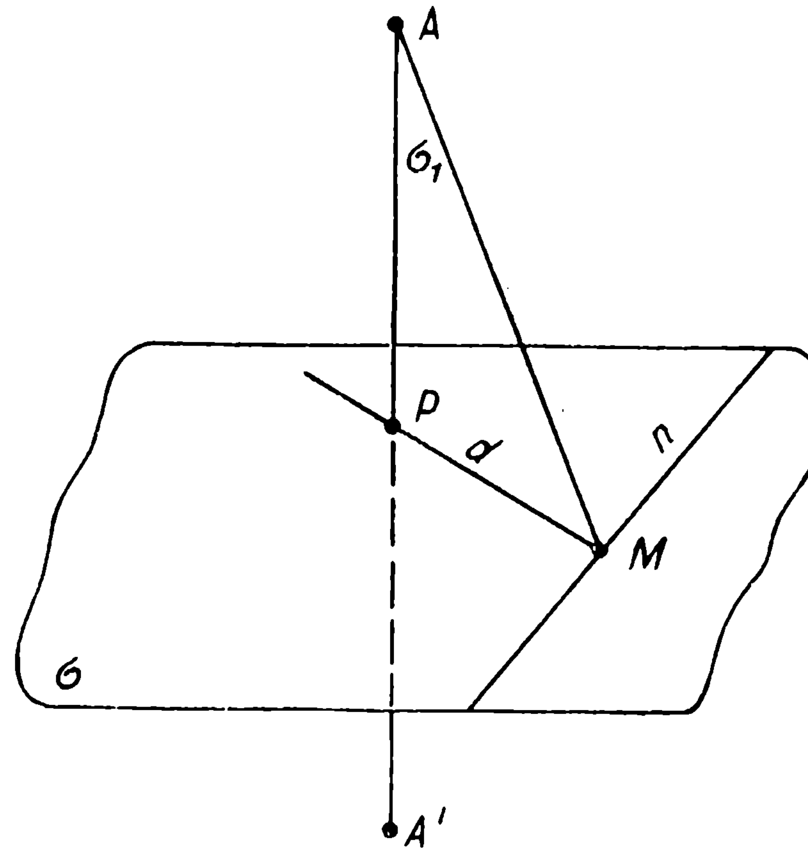


Рис. 30

б) провести через точку A перпендикуляр к прямой n. Точку пересечения обозначим буквой M;

в) на плоскости σ провести перпендикуляр d к прямой n через точку $M \in n$;

г) провести плоскость σ_1 через две пересекающиеся прямые AM и d;

д) провести на плоскости σ_1 прямую AP, перпендикулярную к d;

е) продолжить прямую AP за точку P и отложить $|A'P| = |AP|$.

Так как $n \perp [AM]$ и $n \perp d$, то $n \perp \sigma_1$, а также $[AP] \perp n$, $[AP] \perp d$; следовательно, $[AP] \perp \sigma$, что влечет за собой $[AA'] \perp \sigma$.

Итак, точка A' — искомая.

6. Найти множество точек пространства, одинаково удаленных от двух данных пересекающихся прямых a и b (рис. 31).

Решение. Пусть точка A одинаково удалена от прямых a и b. Это значит, что, проведя $[AK] \perp a$ и $[AL] \perp b$, получим $|AK| = |AL|$. Если B — проекция A на плоскость σ, проходящую через a и b, то $|BK| = |BL|$, так как длины наклонных AK и AL равны. Точка B лежит на биссектрисе OB угла KOL. Итак, проекция любой точки искомого множества точек попадает на биссектрису OB, а это значит, что все точки, равноудаленные от a и b, лежат в плоскости, перпендикулярной σ и проходящей через биссектрису OB. Множеству точек, равноудаленных от двух данных прямых, принадлежит и еще одна плоскость, перпендикулярная и проходящая через другую биссектрису угла между прямыми a и b.

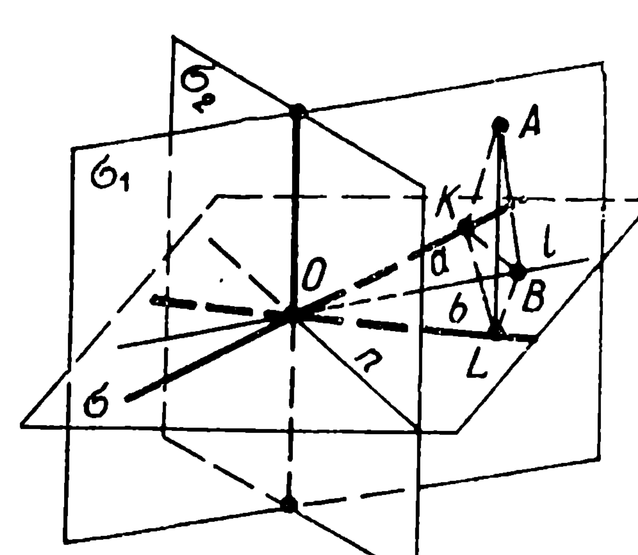


Рис. 31

Доказательство. Для доказательства того, что плоскости σ_1 и σ_2 являются искомыми множествами точек, покажем, что плоскость σ_1 является множеством точек, одинаково удаленных от прямых a и b. Так как l является осью симметрии прямых a и b (по построению), то любая точка, принадлежащая прямой l, будет одинаково удалена от прямых a и b.

Возьмем любую точку A плоскости σ_1, не принадлежащую прямой l, и проведем перпендикуляр AB к плоскости σ; основание этого перпендикуляра B лежит на прямой l. В плоскости σ проведем $(BK) \perp a$, $(BL) \perp l$.

На основании теоремы о трех перпендикулярах $(AK) \perp a$, $(AL) \perp b$. Так как точка K симметрична точке L относительно l, а стало быть, относительно плоскости σ_1, и, кроме того, точка A симметрична сама себе относительно плоскости σ_1, то отрезки AK и AL симметричны и, следовательно, конгруэнтны.

Итак, $(AK) \perp a$, $(AL) \perp b$, $|AK| = |AL|$ и, таким образом, плоскость σ есть искомое множество точек.

Докажите самостоятельно, что никакая точка, не принадлежащая плоскостям σ_1 и σ_2, не принадлежит искомому множеству.

З а м е ч а н и е. Данную задачу можно сформулировать иначе так: «Постройте плоскости симметрии двух пересекающихся прямых a и b».

7. Дана плоскость σ и две точки A и B. Найдите на плоскости σ такую точку N, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B, т. е. $|AN| + |NB|$, была наименьшая.

Р е ш е н и е. Если бы точки A и B были расположены по разные стороны от плоскости σ, то очевидно, что искомая точка N — точка пересечения прямой AB с плоскостью σ (рис. 32, a).

Если же точки A и B расположены по одну сторону от плоскости σ (рис. 32, $б$), то искомая точка N получится при пересечении прямой $A'B$ с плоскостью σ, где $A' = S_\sigma(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка N находится на прямой l, которая перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину A_0 (рис. 32, $б$), а поэтому $|AN| = |A'N|$, отсюда $|AN| + |NB| = |A'N| + |NB|$.

Возьмем на плоскости σ произвольную точку K. Соединив точки A_0 и K, получим отрезок A_0K, перпендикулярный отрезку AA' и проходящий через его середину A_0, поэтому

$$|AK| = |A'K|.$$

Отсюда вытекает, что

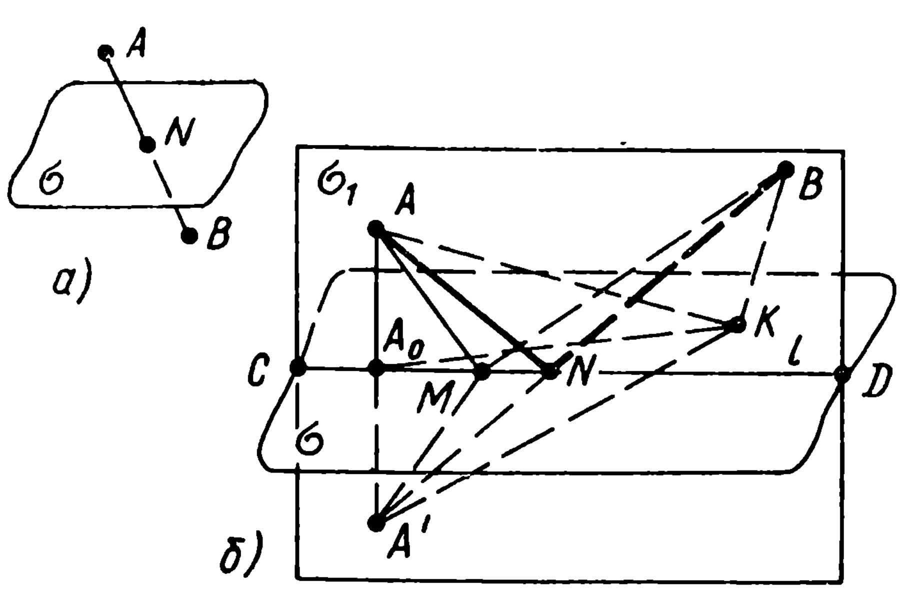
$$|AK| + |KB| = |A'K| + |KB|.$$

Из $\triangle A'KB$ имеем, что

$$|A'K| + |KB| > |A'B|.$$

Так как $|A'B| = |AN| + |NB|$, то ясно, что

$$|A'K| + |KB| > |AN| + |NB|.$$



Р и с. 32

Таким образом, приходим к выводу, что сумма $|AN| + |NB|$ имеет наименьшее значение и, следовательно, N — искомая точка на плоскости σ. Аналогично проводятся рассуждения для точек прямой, отличных от N, например для точки M (рис. 32, *б*).

8. Дана плоскость σ и по разные стороны от нее две точки — A и B. Найдите на плоскости σ такую точку N, чтобы разность ее расстояний до точек A и B была наибольшей.

9. Дана плоскость σ и по одну сторону от нее точки A и B. Найдите на плоскости σ такую точку N, чтобы разность ее расстояний до точек A и B была наибольшей.

10. Даны пересекающиеся плоскости σ и σ_1, между ними точка A. Найдите на плоскости σ такую точку B, а на плоскости σ_1 точку C, чтобы сумма расстояний $|AB| + |BC| + |CA|$ была наименьшей.

11. Докажите, что если плоскости σ_1 и σ_2 параллельны и имеются две прямые, перпендикулярные к плоскости σ_1, то в результате двух последовательно проведенных симметрий сначала относительно плоскости σ_1, а затем и σ_2 эти прямые отображаются сами на себя.

12. В кубе окрасили две грани в черный цвет. Постройте плоскость симметрии окрашенной фигуры. Возможны два случая: а) окрашенные грани имеют общее ребро и б) они параллельны.

13. В кубе окрасили три грани в красный цвет. Постройте плоскость симметрии окрашенной фигуры. Сколько случаев расположения окрашенных граней нужно при этом рассмотреть?

14. В правильном октаэдре окрасили а) одну, б) две, в) три грани в синий цвет. В каждом случае постройте плоскость симметрии окрашенной фигуры. Сколько вариантов расположения окрашенных граней возможны в каждом случае?

15. Даны квадрат и равносторонний треугольник, вписанные в одну и ту же окружность и имеющие общую вершину. На квадрате постройте куб и на треугольнике — правильный тетраэдр. Определите плоскости симметрии фигуры, точки которой принадлежат одновременно кубу и тетраэдру.

16. Три конгруэнтных шара касаются друг друга. Определите плоскости симметрии полученной фигуры.

17. Постройте отрезок, симметричный данному отрезку относительно плоскости σ. Рассмотрите различные случаи взаимного положения отрезка и плоскости.

18. Найдите множество точек равноотстоящих от трех попарно пересекающихся прямых.

19. Найдите множество точек, равноотстоящих от трех вершин треугольника.

20. Докажите, что три биссектральные плоскости трехгранного угла пересекаются по одной и той же прямой.

21. Найдите плоскости, одинаково наклоненные к двум пересекающимся плоскостям и проходящие через линию их пересечения.

22. Докажите, что всякая прямая, лежащая в плоскости симметрии двух данных пересекающихся прямых a и b, составляет с этими прямыми конгруэнтные углы.

23. Докажите, что плоскости σ_1 и σ_2, полученные одна из другой путем отражения от третьей плоскости σ_3, или пересекаются по прямой, лежащей на плоскости σ_3, или параллельны между собою.

24. Докажите, что две прямые, симметричные относительно какой-либо плоскости, лежат в одной плоскости.

В задачах мы уже говорили о композициях симметрий относительно плоскостей, например, $S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$, где σ_1 и σ_2 параллельны между собой. Свойства этих композиций зависят от взаимного расположения этих плоскостей. Для плоскостей σ_1 и σ_2 возможны три случая их расположения: 1) $\sigma_1 \parallel \sigma_2$; 2) $\sigma_1 \perp \sigma_2$; 3) σ_1 и σ_2 пересекаются, но не перпендикулярны. В дальнейшем мы будем встречаться с каждым из этих случаев.

Кроме этого, нам придется иметь дело и с композицией симметрий относительно трех плоскостей. Случаев расположения этих плоскостей уже больше (перечислите их). Однако все эти композиции объединяет выполнение некоторых свойств, которые следуют непосредственно из определения симметрии относительно плоскости. Перечислим их:

1) прямая отображается на прямую;
2) плоскость отображается на плоскость;
3) любая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру.

§ 3. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ (ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПРЯМОЙ)

Дадим определение осевой симметрии в пространстве:

Отражением от прямой l называется преобразование, при котором:

1) *точки прямой l отображаются сами на себя;*
2) *каждая точка A отображается на точку A' такую, что:*
а) $(AA') \perp l$;
б) $|OA| = |OA'|$, *где O — точка пересечения отрезка AA' с прямой l.*

Отражение от прямой иначе называют осевой симметрией, прямая l при этом называется осью симметрии.

Преобразование точки A на точку A' при отражении от прямой l символически записывается в виде $S_l(A) = A'$.

В учебном пособии по геометрии для IX класса дается такое определение осевой симметрии: преобразование пространства, при котором каждая точка отображается на симметричную ей точку относительно заданной прямой l, называется осевой симметрией.

Теорема 3. **Осевая симметрия есть перемещение*.**

* Доказательство смотрите в учебном пособии по геометрии для IX класса.

Из доказательства данной теоремы вытекает, что при осевой симметрии любая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру.

Теперь мы докажем теорему, дающую возможность представить осевую симметрию как композицию двух отражений от двух взаимно перпендикулярных плоскостей.

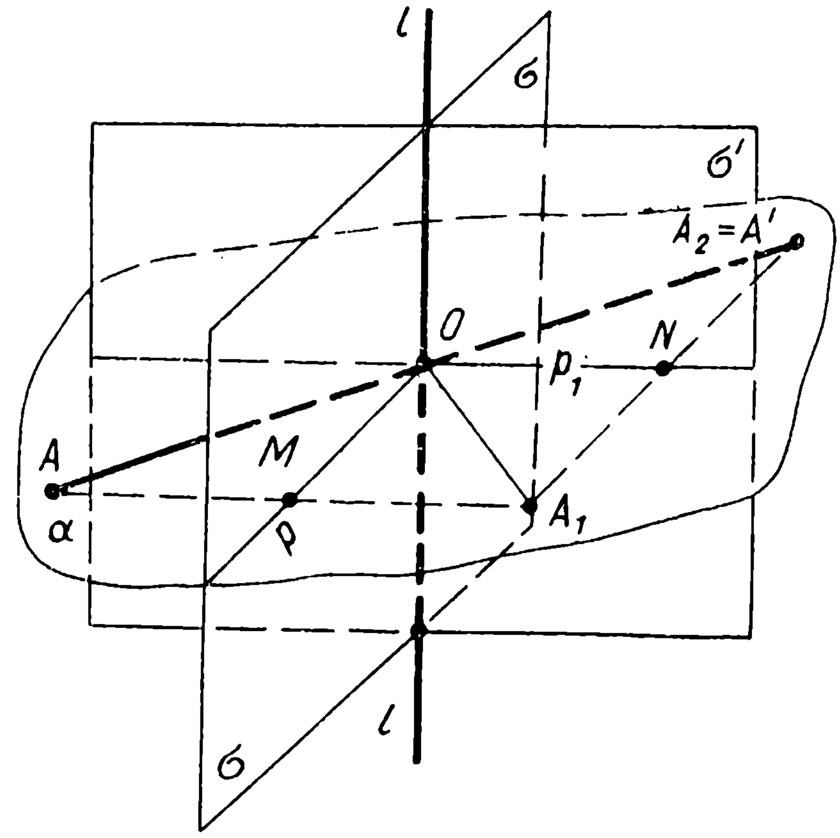


Рис. 33

Т е о р е м а 4. **Отражение от прямой l в пространстве можно представить в виде композиции двух отражений от взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по оси симметрии l, причем одну из плоскостей можно выбрать произвольно.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $S_l(A) = A'$ (рис. 33). Проведем через прямую l произвольную плоскость σ и плоскость σ', перпендикулярную к σ. Допустим, что $S_\sigma(A) = A_1$ и $S_{\sigma'}(A_1) = A_2$. Докажем, что $A_2 = A'$.

Действительно, так как $(AA_1) \perp \sigma$, то $(AA_1) \perp l$, а $(A_1A_2) \perp \sigma'$; следовательно, $(A_1A_2) \perp l$.

Итак, l перпендикулярна к плоскости AA_1A_2, пересекающейся с ней в той же точке O, в которой ее пересекает ось l. Плоскость AA_1A_2 пересекает плоскости σ и σ' по взаимно перпендикулярным прямым p и p_1. В силу симметрии имеем:

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOA_1}, \widehat{A_1ON} = \widehat{NOA_2}, \text{ но } \widehat{NOA_1} + \widehat{A_1OM} = \widehat{MON} = 90°.$$

Следовательно, $\widehat{AOA_2} = 2 \cdot \widehat{MON} = 180°$, т. е. точки A_1 и A_2 лежат на одной и той же прямой и $(A_1A_2) \perp l$.

Вместе с тем $|OA| = |OA_1| = |OA_2|$, отсюда $|OA_2| = |OA'|$, т. е. $A_2 = A'$. Следовательно, композиция отражений от двух плоскостей σ и σ' дают отражение от прямой l.

В соответствии с доказанной теоремой определение осевой симметрии можно дать в таком виде:

Отражением от прямой l или осевой симметрией относительно l называется композиция двух отражений от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по прямой l.

Доказанная выше теорема позволяет рассмотреть свойства отражения от прямой как следствия свойств отражения от плоскости.

1. В первую очередь необходимо отметить, что осевая симметрия, как композиция двух отражений от плоскостей, во-первых, является перемещением, а во-вторых, не изменяет ориента-

цию фигур в виду того, что каждое из двух отражений от плоскости меняет ориентацию фигур на противоположную, в итоге оставляет ориентацию этих фигур одинаковой. Отсюда мы заключаем, что осевая симметрия отображает фигуру на собственно-конгруэнтную фигуру, т. е. является собственным перемещением.

2. При осевой симметрии прямая отображается на прямую, плоскость — на плоскость, отрезок — на конгруэнтный отрезок, угол — на конгруэнтный угол — одним словом, фигура отображается на собственно-конгруэнтную ей фигуру (теорема 3, стр. 36).

3. Неподвижными элементами при осевой симметрии являются точки оси l, прямые и плоскости, перпендикулярные оси l, плоскости, проходящие через ось l (доказательство этих предложений предоставляем читателю).

4. Пользуясь определением осевой симметрии, можно сделать вывод о том, что отражение от прямой есть преобразование инволюционное, т. е. если $S_l(A) = A'$, то $S_l(A') = A$ или

$$S_l(S_l(A)) = A, \text{ т. е. } S_l \circ S_l = E.$$

Рассматривая свойства осевой симметрии можно заметить, что перемещение плоскости — центральная симметрия — имеет свойства, очень схожие со свойствами осевой симметрии пространства. Составим таблицу, в которой сопоставляются эти свойства.

Центральная симметрия на плоскости	Осевая симметрия в пространстве
1. Неподвижный элемент—точка O (центр симметрии).	1. Неподвижный элемент — прямая l (ось симметрии).
2. $\|OA\| = \|OA'\|$.	2. $\|OA\| = \|OA'\|$; $(OA) \perp l$; $(OA') \perp l$.
3. Прямые OA и OA' совпадают.	3. Прямые OA и OA' совпадают и пересекают ось в точке O.
4. Центрально-симметричные фигуры конгруэнтны и одинаково ориентированы.	4. Фигуры, симметричные относительно оси l, конгруэнтны и одинаково ориентированы.
5. Прямые, проходящие через центр симметрии O, отображаются сами на себя.	5. Плоскости, проходящие через ось l, отображаются сами на себя.
6. Центрально-симметричные прямые параллельны.	6. Прямые, симметричные относительно оси и перпендикулярные к ней, параллельны.

Для закрепления материала по данной теме предлагаем выполнить следующие упражнения:

25. Перечислите неподвижные элементы осевой симметрии.

26. Рассмотрите взаимные положения прямых a и a', симметричных друг другу относительно оси l: а) в случае, когда прямая a пересекает ось l; б) в случае, когда прямая a не пересекает ось l.

27. Покажите, что последовательное отражение от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, отображающих точку A на точку A', не зависит от того, в какой последовательности осуществляются отражения.

28. Постройте образ тетраэдра $SABC$ при осевой симметрии с осью l. Рассмотрите случаи: а) ось l, не пересекает тетраэдр, б) ось l имеет только одну общую точку с тетраэдром — одну из вершин тетраэдра, в) ось l содержит одно из ребер тетраэдра, г) ось l пересекает тетраэдр.

29. Докажите, что при отражении от прямой l прямые и плоскости, перпендикулярные к l, являются неподвижными.

30. Докажите, что осевая симметрия (в пространстве) является инволюционным преобразованием.

§ 4. ВЕКТОР (ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС)

Говоря об использовании перемещений пространства при изучении курса стереометрии, мы имеем в виду прежде всего введение в курс стереометрии векторного аппарата. Хорошо известно, что начиная с VII класса понятие вектора отождествляется с понятием параллельного переноса. Мы исходим из того же определения, что и в учебнике геометрии для IX класса.

Вектором (параллельным переносом), определяемым парой (A, B) *несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка* M *отображается на такую точку* M_1, *что луч* MM_1 *сонаправлен с лучом* AB *и расстояние* $|MM_1|$ *равно расстоянию* $|AB|$.

В данной работе мы не рассматриваем свойств векторов, применение их к доказательству теорем, решению задач, так как все это рассмотрено в книге В. А. Гусева, Ю. М. Колягина, Г. Л. Луканкина «Векторы в школьном курсе математики».

В этом параграфе мы более подробно остановимся на возможности представления вектора в виде композиции симметрии относительно двух плоскостей.

Так же как и осевую симметрию, вектор можно представить в виде композиции отражений от двух плоскостей.

Теорема 5. **Вектор можно представить в виде композиции симметрий относительно двух плоскостей, перпендикулярных направлению вектора и находящихся на расстоянии, вдвое меньшем длины этого вектора; при этом одну из плоскостей можно выбрать произвольно.**

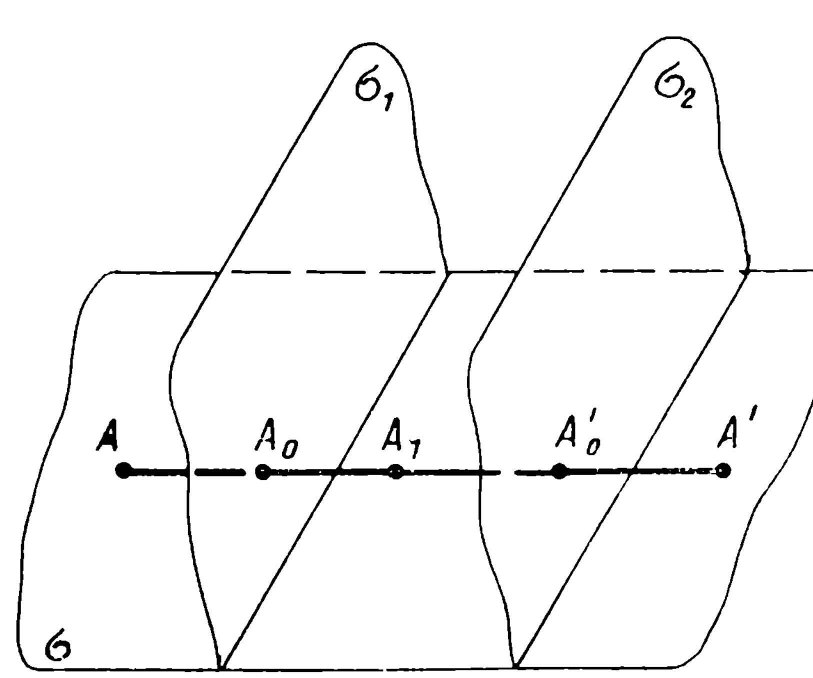


Рис. 34

Доказательство. Пусть (рис. 34) мы имеем вектор $\vec{m}$ и положим, что $\vec{m}(A) = A'$. Возьмем произвольную плоскость $\sigma_1 \perp \vec{m}$ и пусть $S_{\sigma_1}(A) = A_1$.

Так как $\sigma_1 \perp (AA')$ и $(AA_1) \perp \sigma_1$, то точки A, A_1 и A' лежат на одной и той же прямой.

Проведем теперь плоскость симметрии σ_2 так, что

$$S_{\sigma_2}(A_1) = A'.$$

Так как $\sigma_1 \perp (AA')$, то $\sigma_1 \| \sigma_2$. Пусть A_0 и A_0' соответственные точки пересечения прямой AA' с плоскостями σ_1 и σ_2. По определению отражения получим:

$$\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_1A_0'} = \overrightarrow{A_0'A'}.$$

Вместе с тем, по определению сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_0'} + \overrightarrow{A_0'A'} = \vec{m}$$

или

$$2\overrightarrow{A_0A_1} + 2\overrightarrow{A_1A_0'} = \vec{m}, \qquad 2(\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_0'}) = 2\overrightarrow{A_0A_0'}, \quad \overrightarrow{A_0A_0'} = \frac{\vec{m}}{2}.$$

Таким образом, теорема нами доказана.

В силу того что вектор можно представить в виде композиции двух отражений от плоскости, можно сформулировать его некоторые свойства.

1. Вектор отображает фигуру на собственно-конгруэнтную ей фигуру.

Действительно, любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде композиции $S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$, где σ_1 и σ_2 перпендикулярны $\vec{a}$ и расстояние между ними равно $\frac{|\vec{a}|}{2}$.

Каждая из этих симметрий есть преобразование зеркальное, меняющее ориентацию фигуры, а их композиция будет собственным преобразованием, отображающим фигуру на собственно-конгруэнтную фигуру.

2. Неподвижными фигурами при параллельном переносе являются прямые и плоскости, параллельные направлению переноса. Неподвижных точек нет. Тождественное преобразование получается в случае, если $\vec{m} = \vec{0}$.

Все эти факты следуют из того, что вектор можно представить в виде композиции соответствующих симметрий относительно плоскостей, при которой плоскости и прямые, перпендикулярные плоскостям, отображаются на себя. Эта композиция не имеет неподвижных точек и является тождественным отображением, если плоскости симметрий совпадают.

Для закрепления материала этого пункта можно рассмотреть следующие задачи:

31. Докажите, что композиция двух отражений от параллельных плоскостей есть вектор, перпендикулярный этим плоскостям, направленным от первой плоскости ко второй, и длина равна его удвоенному расстоянию между плоскостями.

32. Докажите, что если даны две конгруэнтные и одинаково ориентированные фигуры с соответственными точками A и A', B и B', C и C', в которых $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, то существует единственный перенос, отображающий эти фигуры одна на другую.

33. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, получаемые один из другого параллельным переносом, M — точка пересечения отрезков AB_1 и BA_1, N — точка пересечения отрезков AC_1 и CA_1, P — точка пересечения отрезков BC_1 и CB_1. Докажите, что треугольник MNP конгруэнтен треугольнику DEP, образованному средними линиями треугольника ABC (или $A_1B_1C_1$).

34. Основаниями параллелепипеда являются квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. На этих квадратах построены кубы — первый вне данного параллелепипеда, а второй по ту же сторону от основания $A_1B_1C_1D_1$, что и сам параллелепипед. Докажите, что расстояние между центрами кубов равно длине бокового ребра параллелепипеда.

35. Данный конус и сфера лежат на одной плоскости, проведите сечение плоскостью, параллельной основанию конуса, так, чтобы в сечении получились конгруэнтные круги.

§ 5. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ОСИ (ПОВОРОТ ВОКРУГ ОСИ)

Вращением вокруг оси называется преобразование пространства, при котором:

1) *имеется единственная прямая r, все точки которой отображаются сами на себя;*

2) *любая точка $A \notin r$ отображается на точку A' такую, что* а) *точки A и A' лежат в плоскости σ, перпендикулярной к r,* б) $\widehat{AOA'} = \omega$, *является постоянным по величине и направлению* (*точка O — есть точка пересечения плоскости σ с осью r*), в) $|OA| = |OA'|$.

Прямую r называют осью вращения, угол ω — углом вращения (рис. 35).

Иногда вращение вокруг оси называют поворотом около оси r.

Символически отображение точки A на точку A' при повороте с осью r на угол ω обозначается так:

$$R_r^{\omega}(A) = A'.$$

Как и предыдущие два преобразования, вращение вокруг оси можно представить в виде композиции двух отражений от плоскости.

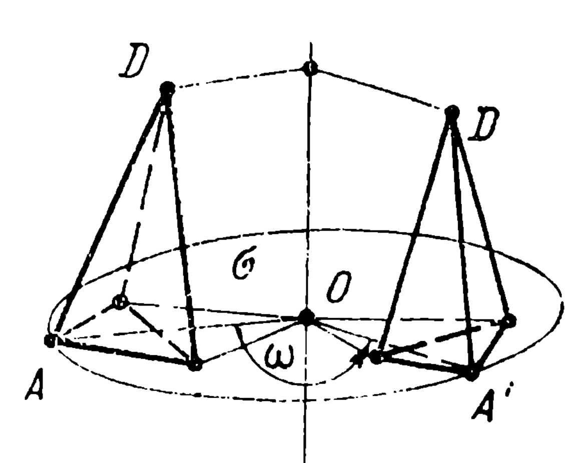


Рис. 35

Теорема 6. **Всякое вращение можно представить в виде композиции двух отражений от плоскостей, которые прохо-**

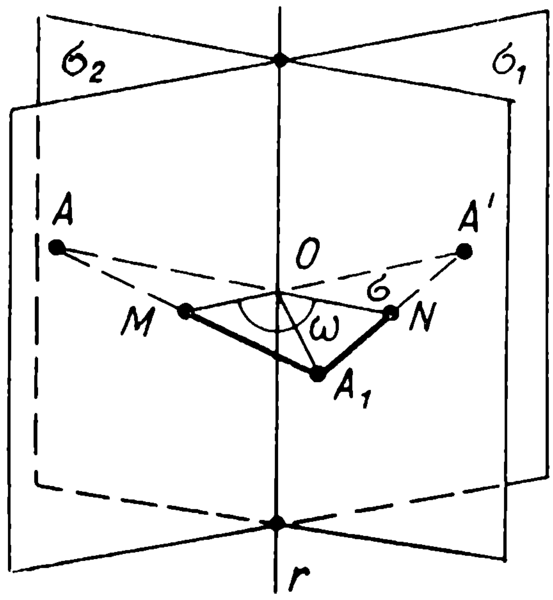


Рис. 36

дят через ось вращения и угол между которыми вдвое меньше угла вращения, при этом одну из плоскостей можно выбрать произвольно.

Замечание. В условии теоремы фигурирует угол между плоскостями, т. е. двугранный угол. Но известно, что двугранный угол измеряется соответствующим ему линейным углом. В теореме как раз и имеется в виду линейный угол.

Доказательство. Пусть $R_r^{2\omega}(A) = A'$ (рис. 36). Проведем произвольную плоскость σ_1 через ось r. Положим, что $S_{\sigma_1}(A) = A_1$. Точки A, A_1 и A' принадлежат одной и той же плоскости σ перпендикулярной к r и σ_1. Обозначим точку пересечения плоскости σ с осью r через O, тогда увидим, что преобразование $f(A) = A_1$ есть поворот около точки O в плоскости σ, или $f(A) = A_1$ — осевая симметрия по отношению к прямой OM, где $(OM) = \sigma_1 \cap \sigma$.

Обозначим через (ON) вторую ось симметрии между A_1 и A'. Тогда, проведя плоскость σ_2 через r и (ON), получим:

$$S_{\sigma_2}(A_1) = A'.$$

Мы получили искомое разложение вращения на два отражения.

Свойства вращения, также как свойства осевой симметрии и параллельного переноса, легко сформулировать, имея в виду только что доказанную теорему.

1. При вращении вокруг оси фигура отображается на собственно-конгруэнтную. Доказательство этого свойства следует из того, что симметрия относительно плоскости меняет ориентацию фигуры, а композиция симметрий сохраняет ее.

2. Неподвижными элементами вращения являются точки оси вращения и плоскости, перпендикулярные этой оси. Тождественное преобразование получается в случае, если $\omega = 2\pi k$; $k \in \boldsymbol{Z}$. (Докажите самостоятельно.)

3. Отражение относительно прямой можно рассматривать как частный случай вращения, когда $\omega = \pi$. Можно сказать, что *поворотом пространства вокруг оси l называется перемещение, при котором все точки прямой l и только они отображаются на себя.*

Осевая симметрия также удовлетворяет этому свойству, поэтому она считается частным случаем вращения с углом вращения $\omega = \pi$.

4. Композиция двух вращений с одной и той же осью есть вращение. Пусть нам даны два поворота: $R_l^{\alpha_1}$ и $R_l^{\alpha_2}$. Мы знаем (теорема 6), что всякое вращение можно представить в виде композиции двух отражений от плоскостей, которые проходят через ось вращения и угол между которыми вдвое меньше угла вращения, при этом

одну из плоскостей можно выбрать произвольно. Итак, $R_l^{\alpha_1} = S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$, а $R_l^{\alpha_2} = S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2}$, где $\sigma_2 \cap \sigma_1 = l$ и $(\widehat{\sigma_1, \sigma_2}) = \frac{\alpha_1}{2}$, $\sigma_3 \cap \sigma_2 = l$ и $(\widehat{\sigma_2, \sigma_3}) = \frac{\alpha_2}{2}$.

Рассмотрим

$$R_l^{\alpha_2} \circ R_l^{\alpha_1} = S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}, \text{ но}$$

$$S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_2} = E, \text{ и тогда } R_l^{\alpha_2} \circ R_l^{\alpha_1} = S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_1}.$$

А это значит, что композиция поворотов вокруг данной оси есть поворот вокруг этой же оси на угол, равный сумме углов данных поворотов.

5. Из предыдущего свойства следует, что вращение в общем случае не является инволюционным преобразованием.

Действительно, если бы было $(R_r^\omega \circ R_r^\omega)(A) = A$, $\omega + \omega = 2\pi k$ или $\omega = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. При $k = 0$ $\omega = 0°$, что соответствует тождественному преобразованию, при $k = 1$ $\omega = \pi$, что соответствует осевой симметрии. Исключив эти случаи, мы можем показать, что $(R_r^\omega \bullet R_r^\omega)(A) \neq A$ или, что то же, $R_r^\omega \circ R_r^\omega \neq E$.

6. Следующее свойство сформулируем в виде теоремы:

Теорема 7. **Всякое вращение можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с пересекающимися осями, перпендикулярными к оси вращения; угол между осями этих осевых симметрий вдвое меньше угла вращения, причем одну из осей можно взять произвольно.**

Доказательство. Пусть дано вращение с осью r и углом ω. Проведем через произвольную точку O оси r ось симметрии $s \perp r$. Через оси r и s проведем плоскость σ, а через прямую s перпендикулярно к σ — две совпадающие плоскости: σ_1 и σ'. Проведем через s еще одну плоскость σ_1' так, чтобы $(\widehat{\sigma, \sigma_1'})$ по величине был бы равен $\frac{\omega}{2}$, т. е. половине угла вращения, и совпадал с углом ω по направлению. Пусть s' — линия пересечения σ_1' с совпадающими плоскостями σ_1 и σ'.

Композиция отражений от всех четырех плоскостей сведется к композиции отражений от двух плоскостей σ и σ_1', так как композиция отражений от двух совпадающих плоскостей есть тождественное отображение. Но композиция отражений от пересекающихся плоскостей σ и σ_1', согласно теореме 6, есть вращение с осью r и углом ω.

Композиция отражений от двух перпендикулярных плоскостей σ и σ' есть симметрия с осью s; а композиция отражений от двух перпендикулярных плоскостей σ_1 и σ_1' есть симметрия с осью s'. $(\widehat{s, s'})$ есть не что иное, как линейный угол двугранного угла

$\sigma\, r\, \sigma_1'$, т. е. $(\widehat{s, s'}) = \frac{\omega}{2}$. Мы получили:

$$R_r^{\omega} = S_{\sigma_1'} \circ S_\sigma = S_{\sigma_1'} \circ E \circ S_\sigma = S_{\sigma_1'} \circ S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma'} \circ S_\sigma = S_{s'} \circ S_s.$$

Здесь $S_{s'}$ означает осевую симметрию с осью s', а S_s — осевую симметрию с осью s.

Итак, наше вращение можно заменить композицией двух осевых симметрий с осями s и s', пересекающимися в точке O, принадлежащей оси вращения. Кроме того,

$$s \perp r \text{ и } s' \perp r \text{ и } (\widehat{s, s'}) = \frac{\omega}{2}.$$

Кроме этого, одну из осей можно провести произвольно.

Две плоскости могут пересекаться или быть параллельными. Поэтому композиция двух отражений от плоскостей есть или поворот, или параллельный перенос. В случае параллельного переноса нет неподвижных точек, в случае поворота имеется, по крайней мере, одна неподвижная точка. Справедливо и обратное утверждение.

Важное значение при изучении вращений около оси имеет теорема Даламбера:

Теорема 8. **Если две собственно-конгруэнтные фигуры расположены так, что некоторая точка одной фигуры совпадает с соответствующей точкой второй фигуры, то обе фигуры получаются одна из другой с помощью поворота.**

Замечание. Чтобы доказать эту теорему, докажем предварительно, что если имеются два луча OA и OB, то множество всех лучей OP, образующих конгруэнтные углы с данными лучами, есть биссектральная плоскость угла AOB (рис. 37).

В самом деле, проведем биссектральную плоскость лучей AO и BO. Она будет плоскостью симметрии этих лучей. Тогда любой луч OP этой плоскости образует конгруэнтные углы с лучами AO и BO, в силу того что угол POA симметричен с углом POB относительно биссектральной плоскости.

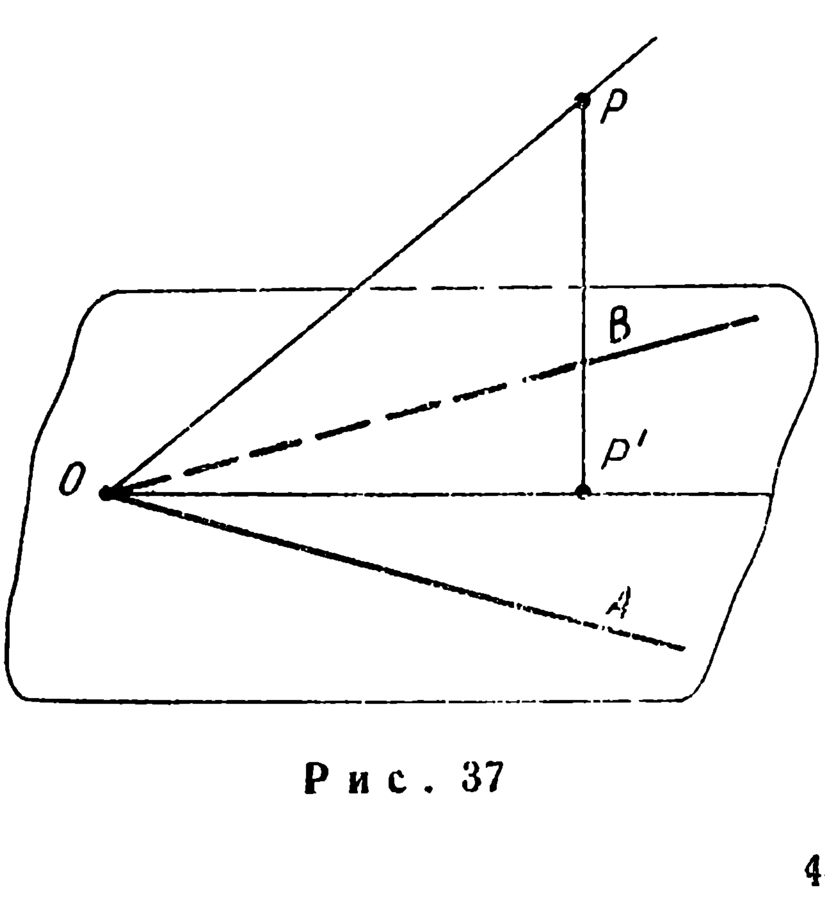


Рис. 37

Доказательство теоремы Даламбера. Пусть даны две собственно конгруэнтные фигуры $OABC\ldots$ и $OA'B'C'\ \ldots$.

Биссектральную плоскость угла AOA' обозначим σ_1. Осуществим отражение фигуры $ABCD\ldots$ от этой плоскости. Получим: $S_{\sigma_1}(O) = O$, $S_{\sigma_1}(A) = A'$, $S_{\sigma_1}(B) = B_1$, $S_{\sigma_1}(C) = C_1$, $S_{\sigma_1}(D) = D_1$, и т. д.

Таким образом, фигура

$ABCD\ldots$ отобразится на фигуру $OA'B_1C_1D_1\ \ldots$ При этом отметим, что $\widehat{A'OB} = \widehat{AOB}$ (как углы, симметричные относительно σ_1), $\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$ (по условию), а отсюда $\widehat{A'OB} = \widehat{A'OB'}$.

Обозначим через σ_2 биссектральную плоскость угла B_1OB'. Нетрудно выяснить, что луч OA' лежит в этой плоскости σ_2 (см. замечание перед доказательством данной теоремы).

Осуществим отражение фигуры $OA'B_1C_1D_1\ \ldots$ относительно σ_2. Получим: $S_{\sigma_2}(O) = O$, $S_{\sigma_2}(A') = A'$, $S_{\sigma_2}(B_1) = B'$, $S_{\sigma_2}(C_1) = C_2$, $S_{\sigma_2}(D_1) = D_2$ и т. д., т. е. фигура $OA'B_1C_1D_1\ \ldots$ отобразится на фигуру $OA'B'C_2D_2\ \ldots$. При этом отметим, что $\widehat{A'OC_2} = \widehat{A'OC_1} = \widehat{AOC} = \widehat{A'OC'}$, $\widehat{B'OC_2} = \widehat{B_1OC_1} = \widehat{BOC} = \widehat{B'OC'}$.

Таким образом, точки C' и C_2 совпадают. Так как точка C выбрана произвольно, то рассуждение справедливо и для любой другой точки D.

Итак, все точки фигуры $OABC\ \ldots$ отображаются соответственно на точки фигуры $OA'B'C'\ldots$ с помощью композиции двух отражений: сначала от плоскости σ_1, а затем от плоскости σ_2. А так как эти плоскости пересекаются (они имеют общую точку O), то преобразование $S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$ есть вращение.

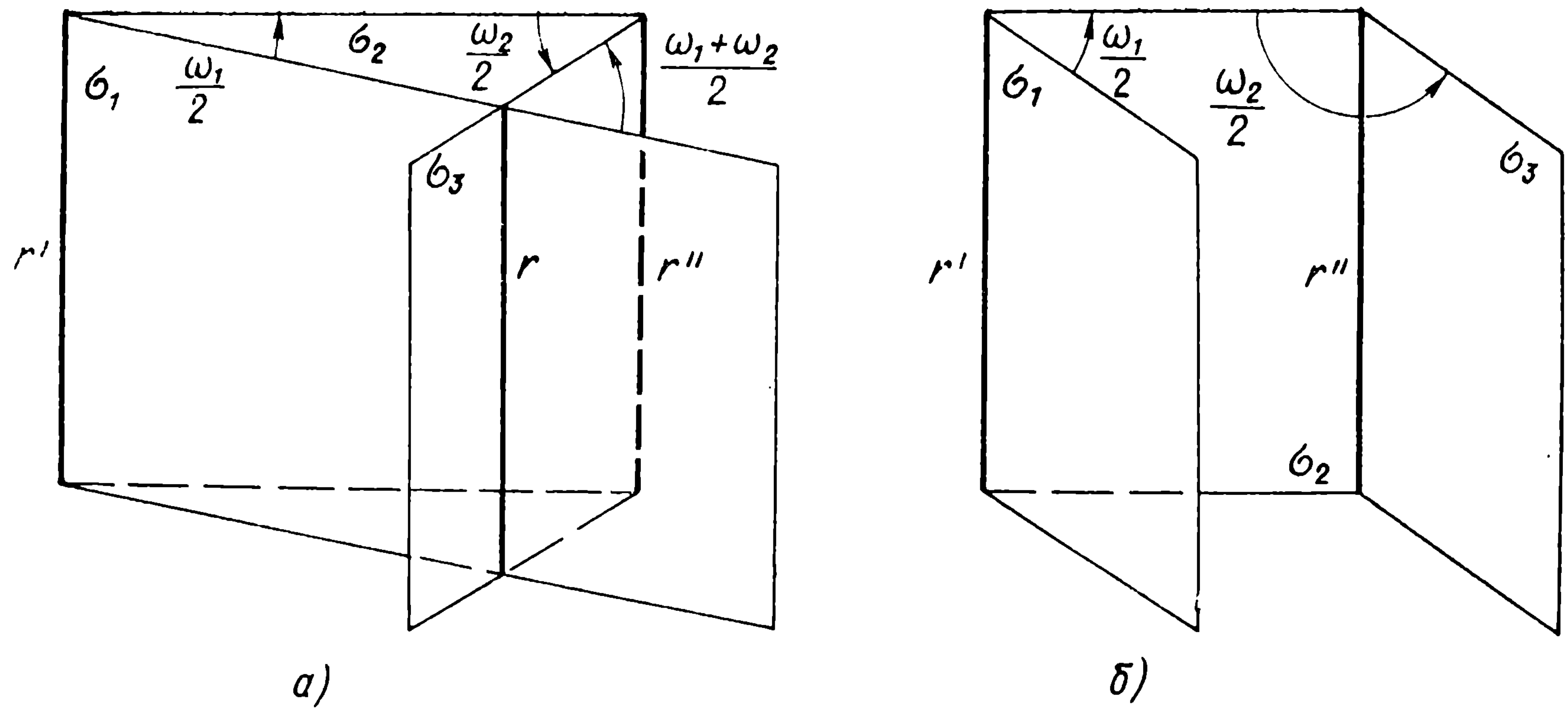
После доказательства теоремы Даламбера легко сформулировать еще одно свойство вращения вокруг оси, а именно:

композиция $R_{r'}^{\omega_1} \circ R_{r''}^{\omega_2}$ двух вращений $R_{r''}^{\omega_2}$ и $R_{r'}^{\omega_1}$ с пересекающимися осями r' и r'' есть вращение.

Действительно, пусть O — точка пересечения осей r' и r''. Вращением $R_{r'}^{\omega_1}$ точка O отображается сама на себя. Точно так же вращением $R_{r''}^{\omega_2}$ эта точка отображается на себя. Таким образом, в композиции $R_{r'}^{\omega_1} \circ R_{r''}^{\omega_2}$ точка O остается неподвижной. В силу теоремы Даламбера, это результирующее преобразование является вращением. При этом вполне очевидно, что ось вращения проходит через точку O.

А теперь рассмотрим композицию $R_{r'}^{\omega_1} \circ R_{r''}^{\omega_2}$ двух вращений $R_{r'}^{\omega_1}$ и $R_{r''}^{\omega_2}$ с параллельными осями r' и r'' (рис. 38).

Вращение $R_{r'}^{\omega_1}$ представим в виде композиции двух отражений от плоскостей σ_1 и σ_2, причем выберем плоскость σ_2 так, чтобы она проходила через оси r' и r''. Причем $\widehat{(\sigma_1, \sigma_2)} = \frac{\omega_1}{2}$ (теорема 6). Точно так же вращение $R_{r''}^{\omega_2}$ представим в виде композиции двух отражений от плоскостей σ_2 и σ_3, причем $\widehat{(\sigma_2, \sigma_3)} = \frac{\omega_2}{2}$. Тогда имеем: $(S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2}) \circ (S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}) = S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$. Но так как композиция $S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_2}$ является тождественным преобразованием, то результирующее преобразование равно композиции отражений от плоскостей σ_1 и σ_3, а это — вращение около прямой r, если эти



Р и с. 38

плоскости не параллельны, т. е. если $\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} \neq k\pi$ или, что то же, $\omega_1 + \omega_2 \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 38, *а*). Если же $\omega_1 + \omega_2 = 2k\pi$ (рис. 38, *б*), то плоскости σ_1 и σ_2 параллельны и результирующее преобразование — параллельный перенос.

Таким образом, композиция вращений с параллельными осями есть или вращение, или параллельный перенос.

Для закрепления материала по этой теме предлагаем выполнить следующие упражнения:

36. Докажите, что композиция отражений от двух плоскостей σ_1 и σ_2, пересекающихся по прямой r, есть вращение около оси r на угол, вдвое больший угла между плоскостями σ_1 и σ_2.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

37. Постройте ось поворота двух данных собственно конгруэнтных фигур, зная, что точка A первой фигуры совпадает с соответствующей ей точкой второй фигуры.

Р е ш е н и е. Пусть B и C — какие-либо две точки первой фигуры, не лежащие с точкой A на одной прямой, B' и C' — соответствующие им точки второй фигуры.

Так как искомая ось поворота образует равные углы с лучами AB и AB', а также с лучами AC и AC', то она совпадает с линией пересечения биссектральных плоскостей α и β углов BAB' и CAC' соответственно.

Если плоскости α и β совпадают, то ось поворота не определяется этим построением. Как легко видеть, в этом случае осью поворота будет линия пересечения плоскостей ABC и $A'B'C'$.

38. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть перенос, а композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот.

39. Докажите, что если оси двух вращений пересекаются, то композиция двух таких вращений есть также вращение.

40. При вращении с осью s плоскость σ отображается на плоскость σ_1. Какие положения может занимать линия пересечения этих плоскостей относительно оси s?

41. Что представляет собой композиция двух осевых симметрий, когда оси перпендикулярны, параллельны?

§ 6. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ (ОТРАЖЕНИЕ ОТ ТРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ)

В зависимости от различных случаев расположения двух плоскостей в пространстве мы получаем перемещения:

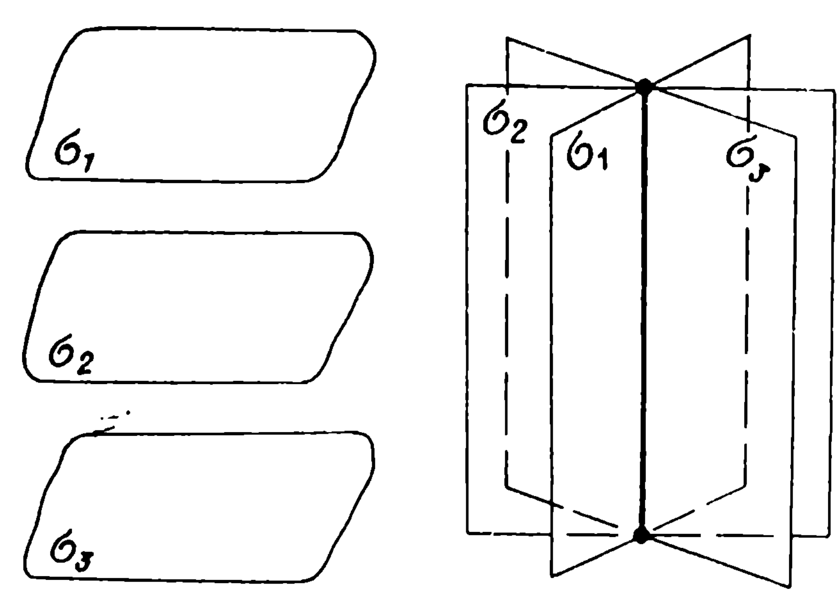
а) параллельный перенос — композиция отражений от двух параллельных плоскостей;

б) вращение вокруг оси — композиция двух отражений от двух пересекающихся плоскостей.

Возможны следующие случаи расположения трех плоскостей в пространстве:

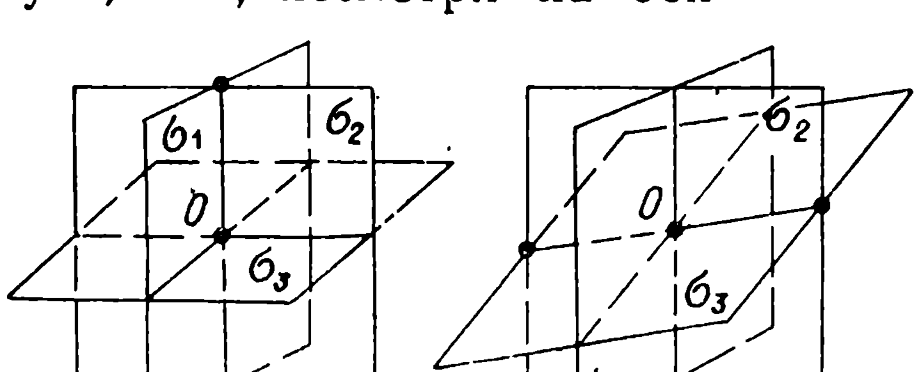
1. Все три плоскости параллельны (рис. 39, *а*).
2. Все три плоскости пересекаются по одной прямой (рис. 39, *б*).
3. Линия пересечения двух плоскостей перпендикулярна третьей плоскости (рис. 40, *а*) (частный случай).
4. Все три плоскости пересекаются в одной точке (рис. 40, *б*).
5. Две плоскости параллельны между собой и перпендикулярны к третьей плоскости (рис. 41).
6. Две плоскости параллельны между собой и третья плоскость пересекает их, но не перпендикулярна.
7. Линии пересечения трех плоскостей параллельны (рис. 42).

При изучении композиций отражений от трех плоскостей могут быть рассмотрены все эти случаи в зависимости от расположения плоскостей. Важно подчеркнуть, что, несмотря на оби-



а) *б)*

Рис. 39



а) *б)*

Рис. 40

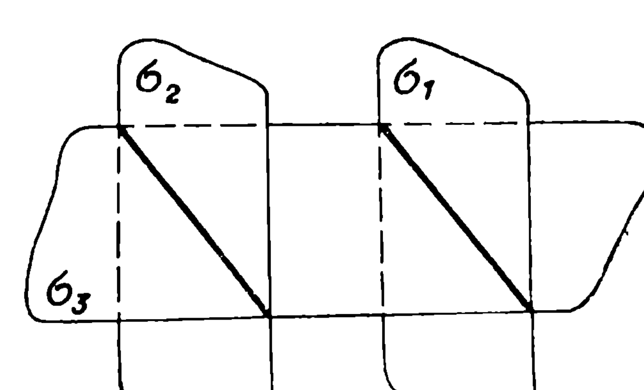


Рис. 41

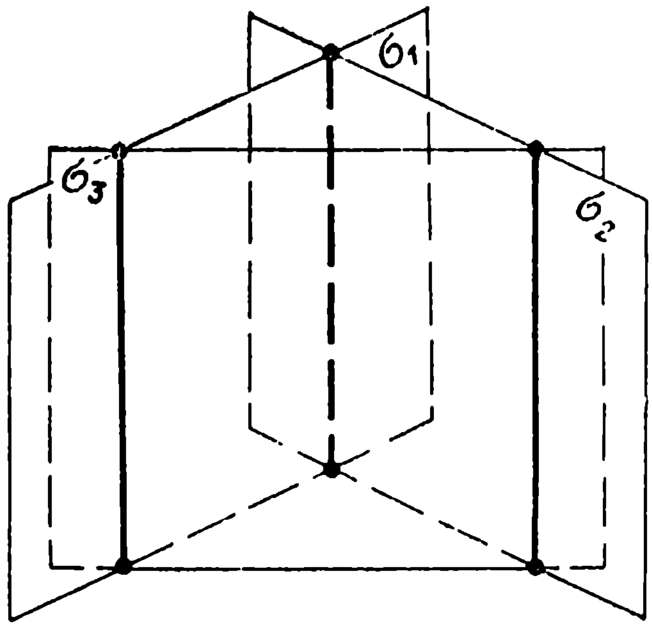


Рис. 42

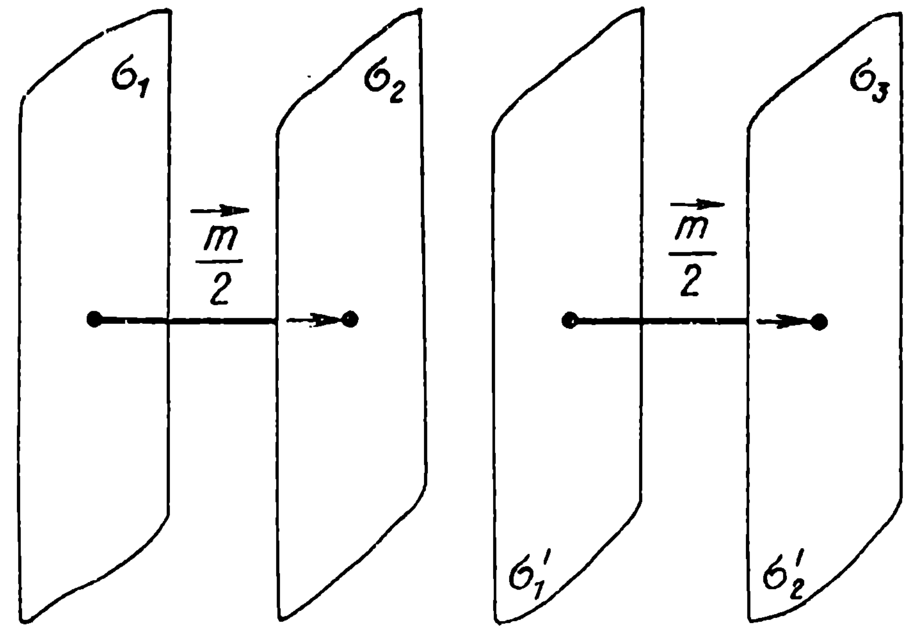


Рис. 43

лие этих случаев, композицию отражений от трех плоскостей можно всегда свести к отражению от одной плоскости, к поворотному отражению (частным случаем которого можно считать центральную симметрию) и к скользящему отражению*.

Изучение композиции отражений от трех плоскостей лучше всего начать с того случая, когда три плоскости принадлежат одному пучку плоскостей или все три параллельны.

Теорема 9. **Композиция трех отражений от трех параллельных между собой плоскостей есть отражение от плоскости.**

Доказательство. Пусть $\sigma_1 \parallel \sigma_2 \parallel \sigma_3$ (рис. 43). Композиция $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2}$ отражений от плоскостей σ_2 и σ_1 есть параллельный перенос $\vec{m}$, который можно представить как композицию $S_{\sigma_1'} \circ S_{\sigma_2'}$ отражений от плоскостей, параллельных первым двум плоскостям σ_1 и σ_2 (см. § 4, теорема 5, стр. 39). Плоскость σ_2' выберем так, чтобы она совпала с σ_3. Тогда получим:

$$S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3} = S_{\sigma_1'} \circ S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_3} = S_{\sigma_1'} \circ (S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_3}) = S_{\sigma_1'}.$$

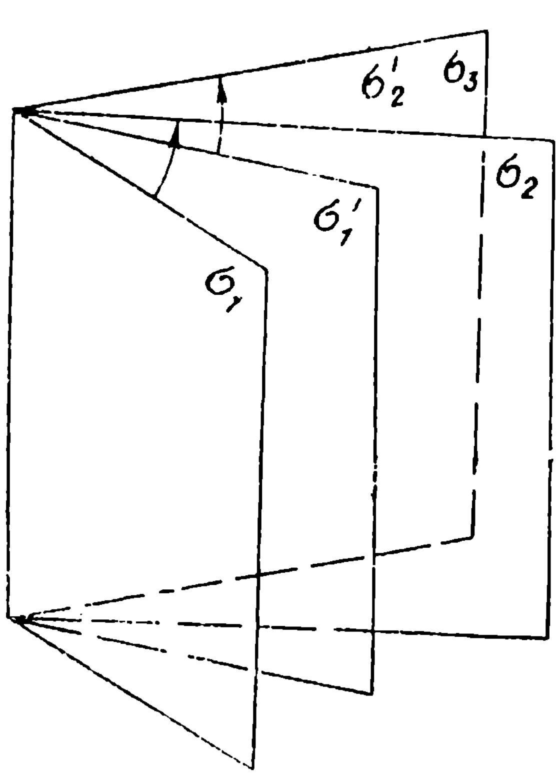


Рис. 44

Теорема 10. **Композиция отражений от трех плоскостей, пересекающихся по одной прямой, есть отражение от плоскости.**

Доказательство (рис. 44). В композиции $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3}$ заменим $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2}$ композицией $S_{\sigma_1'} \circ S_{\sigma_2'}$, причем в силу произвольности одной из плоскостей σ_2' выберем так, чтобы она совпадала с плоскостью σ_3.

---

* Изучению поворотного отражения и скользящего отражения будут посвящены следующие два параграфа.

Тогда получим: $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3} = S_{\sigma_1'} \circ S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_3}$.

Так как $S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_3}$ является тождественным преобразованием, то результирующее преобразование будет отражением от плоскости σ_1'.

Примечание. Множество плоскостей, пересекающихся по одной и той же прямой или параллельных между собой, называют пучком плоскостей.

Таким образом, предыдущие две теоремы можно объединить и сформулировать в следующем виде:

Композиция трех отражений от трех плоскостей, принадлежащих одному и тому же пучку, есть отражение от плоскости, принадлежащей этому же пучку.

Рассмотрим теперь преобразование, представленное в виде композиции трех отражений от плоскостей и имеющее одну неподвижную точку. Сначала дадим определение этого преобразования.

Центральной симметрией с центром в точке O (отражением от точки) в пространстве называется такое преобразование, при котором центр симметрии отображается сам на себя, а каждой точке A соответствует точка A_1 такая, что точка O является серединой отрезка AA_1.

Соответствующие друг другу точки при этом называются центрально-симметричными точками. Обозначение: $Z_O(A) = A_1$.

Как видим, центральная симметрия определяется заданием центра симметрии, относительно которого можно построить для каждой точки центрально-симметричную ей точку.

Теорема 11. **Отражение от точки в пространстве есть композиция отражений от трех попарно перпендикулярных плоскостей; при этом центром симметрии является общая точка этих плоскостей.**

Доказательство. Пусть O — данный центр симметрии и $Z_O(A) = A'$ (рис. 45).

Проведем через O произвольную плоскость σ_1 и через ту же точку O — перпендикулярную к σ_1 плоскость σ_2. Обозначим через c линию пересечения σ_1 и σ_2. Проведем, наконец, через точку O плоскость σ_3, перпендикулярную к c. Тогда получим: $\sigma_1 \perp \sigma_3$ и $\sigma_2 \perp \sigma_3$.

Пусть $S_{\sigma_1}(A) = A_1$, $S_{\sigma_2}(A_1) = A_2$, $S_{\sigma_3}(A_2) = A_3$. Докажем, что $A_3 = A'$. Введем еще обозначения:

$\sigma_3 \cap \sigma_1 = b$, $b \cap \sigma_2 = O$.

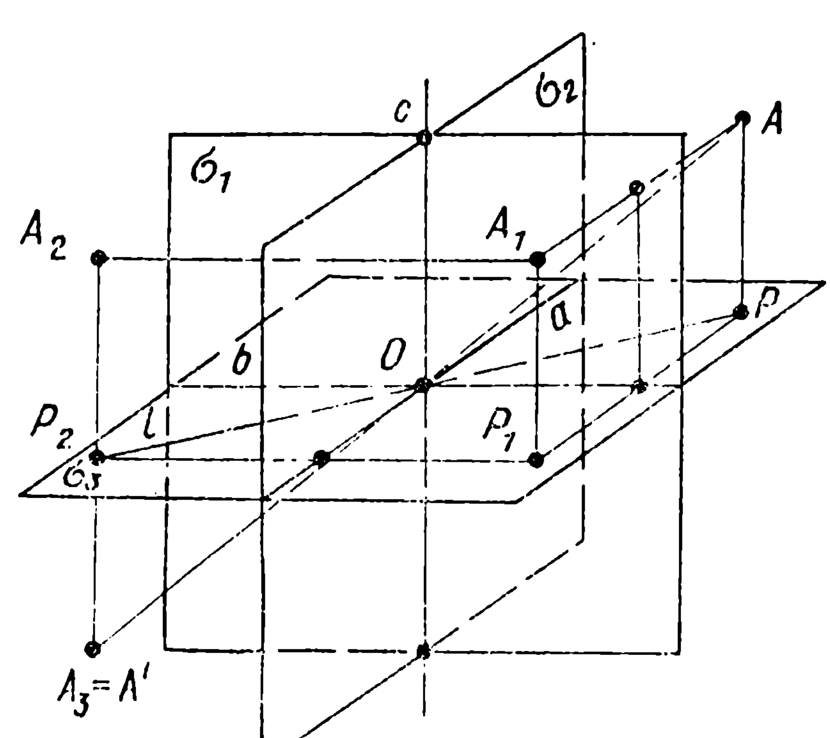


Рис. 45

Первые два отражения относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей σ_1 и σ_2 есть отражение относительно c. Обозначим через P, P_1, P_2 соответственно проекции A, A_1, A_2 на плоскость σ_3. Тогда $(PP_2) = l$, проходящая через точку O, есть проекция прямой AA_2 на плоскость σ_3.

Образ точки A_2 при симметрии относительно плоскости σ_3 совпадает с образом этой точки при осевой симметрии относительно прямой l; следовательно, $S_l(A_2) = A_3$. Вместе с тем $\widehat{POA} + \widehat{AOA_2} + \widehat{A_2OP_2} = 180°$. Кроме того, $\widehat{POA} = \widehat{A_2OP_2} = \widehat{P_2OA_3}$ в силу отражений, поэтому $\widehat{AOA_2} + \widehat{A_2OP_2} + \widehat{P_2OA_3} = 180°$, или $\widehat{AOA_3} = 180°$, т. е. точки A, O, A_3 лежат на одной и той же прямой. Но $|OA| = |OA_1| = |OA_2| = |OA_3|$, т. е. $|OA| = |OA_3|$; значит, $A_3 = A'$.

Таким образом теорема доказана.

Теорема 12 (обратная). **Композиция трех отражений от трех попарно перпендикулярных плоскостей есть центральная симметрия с центром в общей точке пересечения этих плоскостей** (доказательство предоставляем читателю).

Используя доказанную теорему, отметим некоторые свойства центральной симметрии в пространстве:

1. При центральной симметрии, являющейся композицией отражений от трех плоскостей, каждая фигура отображается на несобственно-конгруэнтную ей фигуру.

2. Из определения следует, что единственной неподвижной точкой этого преобразования является центр симметрии и неподвижными прямыми являются прямые, проходящие через центр симметрии. Если проведем через центр симметрии плоскость, то любая точка этой плоскости отображается на точку, лежащую в этой же плоскости. Следовательно, плоскости, проходящие через центр симметрии, являются неподвижными.

3. Если точка A при центральной симметрии Z_O отображается на точку A', то в силу определения точка A' при той же центральной симметрии Z_O отображается на точку A, т. е. центральная симметрия есть преобразование инволюционное:

$$(Z_O \circ Z_O)(A) = A,$$

или:

$$(Z_O \circ Z_O) = E.$$

4. При центральной симметрии прямая отображается на параллельную ей прямую, плоскость — на параллельную ей плоскость.

В самом деле, пусть имеем:

$$Z_O(A) = A', \; Z_O(B) = B'.$$

Проведем через пересекающиеся прямые AA' и BB' плоскость. Тогда прямые AA' и BB' симметричны относительно точки O и лежат в одной плоскости. В силу свойства центральной симметрии на плоскости, прямые AB и $A'B'$ параллельны.

Далее, проведем через прямую AB пересекающую ее прямую CD в точке M. Она отображается на прямую $C'D'$, которая пересечет прямую $A'B'$ в точке M' (в силу того, что центральная симметрия как композиция трех отражений от плоскости есть преобразование коллинеарное). Итак, $(AB) \parallel (A'B')$, $(CD) \parallel (C'D')$. (AB) и (CD) пересекаются, $(A'B')$ и $(C'D')$ также пересекаются. По признаку параллельности двух плоскостей, плоскость, определяемая прямыми $A'B'$ и $C'D'$, параллельна плоскости, определяемой прямыми AB и CD.

Для формирования понятия центральной симметрии полезно выполнить следующие упражнения:

42. Постройте плоскость, симметричную данной плоскости относительно данной точки A.

43. Дана плоскость σ, на ней — окружность K и вне плоскости σ — точка A. Постройте окружность, симметричную данной окружности относительно точки A.

44. Докажите, что ограниченная фигура не может обладать двумя центрами симметрии.

45. Точки A и B движутся с одинаковыми скоростями по двум скрещивающимся прямым. Какую линию описывает середина отрезка AB?

46. Пусть O_1 и O_2 — центры двух конгруэнтных сфер. $[O_1A_1]$ и $[O_2A_2]$ — параллельные между собой радиусы этих сфер. Докажите, что $[O_1A_2]$ получается из $[O_1A_1]$ при параллельном переносе $\overrightarrow{O_1O_2}$ или симметрии относительно середины $[O_1O_2]$.

47. Докажите, что фигура, обладающая тремя центрами симметрии, не лежащими на одной прямой, имеет бесконечное множество центров симметрии; все они лежат в одной плоскости. Исследуйте их расположение.

Примечание. Эти центры образуют так называемую «сеть параллелограммов».

48. Докажите, что фигура, обладающая четырьмя центрами симметрии, не лежащими в одной плоскости, имеет их бесчисленно много.

Примечание. Эти центры составляют вершины «сети параллелепипедов».

49. Нижнее основание цилиндра вписано в квадрат, представляющий собой верхнюю грань куба. В верхнее основание цилиндра вписан шестиугольник, составляющий основание правильной пирамиды. Определите число центров осей и плоскостей симметрии этой фигуры, если квадрат и шестиугольник произвольным образом расположены друг относительно друга. Как мы должны их расположить, чтобы число этих симметрий было наибольшим?

50. Докажите, что середины ребер правильного тетраэдра служат вершинами правильного октаэдра.

51. Вокруг каждой вершины куба, как центра, описываем шар, диаметр которого равен ребру куба. Определите число центров, осей и плоскостей симметрии фигуры, образуемой этими восемью шарами.

52. Покажите, что одинаковыми правильными шестигранными призмами можно заполнить пространство.

53. Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

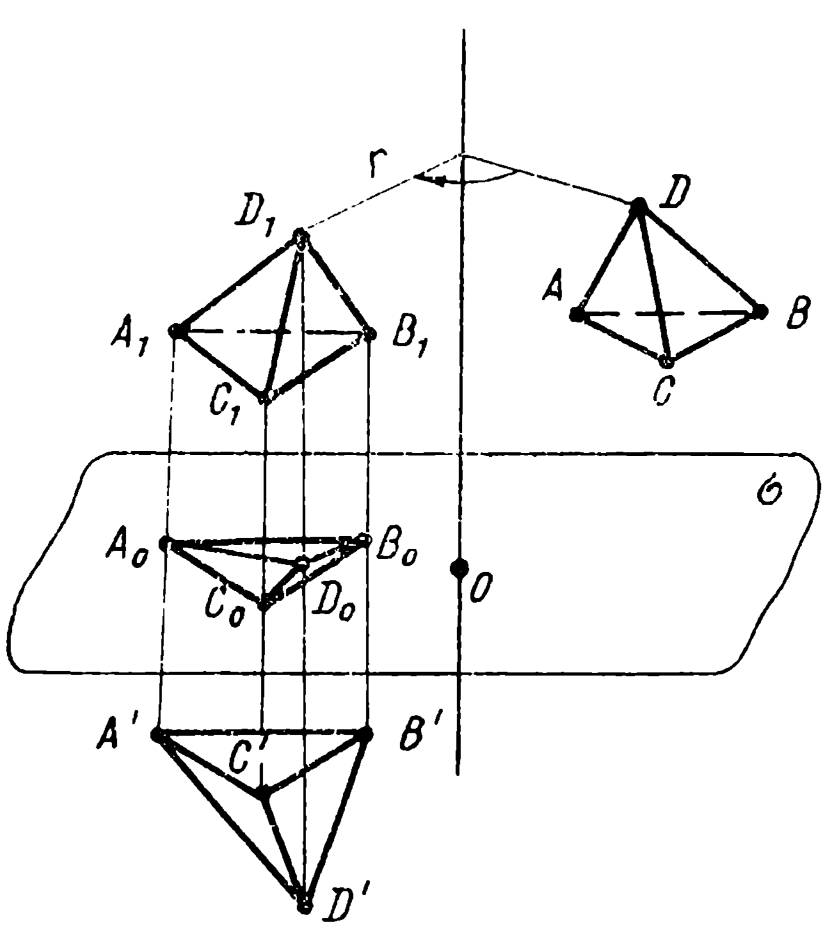
§ 7. ПОВОРОТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

Мы показали, что центральную симметрию можно представить в виде композиции трех отражений от трех плоскостей, попарно перпендикулярных друг другу. Каким же будет преобразование, являющееся композицией трех отражений от плоскостей, имеющих общую точку и не обязательно перпендикулярных друг другу? Это преобразование является поворотным отражением, определим его.

Поворотным отражением называется композиция поворота на угол ω с осью r и отражения от плоскости σ, перпендикулярной к этой оси.

r называется осью поворотного отражения, ω — углом поворотного отражения, σ — плоскостью поворотного отражения, точка O пересечения оси r и плоскости σ — центром поворотного отражения.

На рисунке 46 представлено поворотное отражение. Фигуру $A_1B_1C_1D_1$ получаем из фигуры $ABCD$ путем вращения около оси r на угол ω, а фигуру $A'B'C'D'$ получаем из $A_1B_1C_1D_1$ путем отражения от плоскости σ. Таким образом фигура $A'B'C'D'$ получена из фигуры $ABCD$ в результате поворотного отражения.



Р и с. 46

Нетрудно доказать, что композиция вращения и отражения от плоскости при поворотном отражении обладает переместительным свойством, т. е. сначала можно произвести отражение, а потом вращение, — результирующее преобразование будет то же самое, что и в первом случае (докажите самостоятельно).

Теперь докажем следующее предложение:

Т е о р е м а 13. **Композиция трех отражений от плоскостей, пересекающихся**

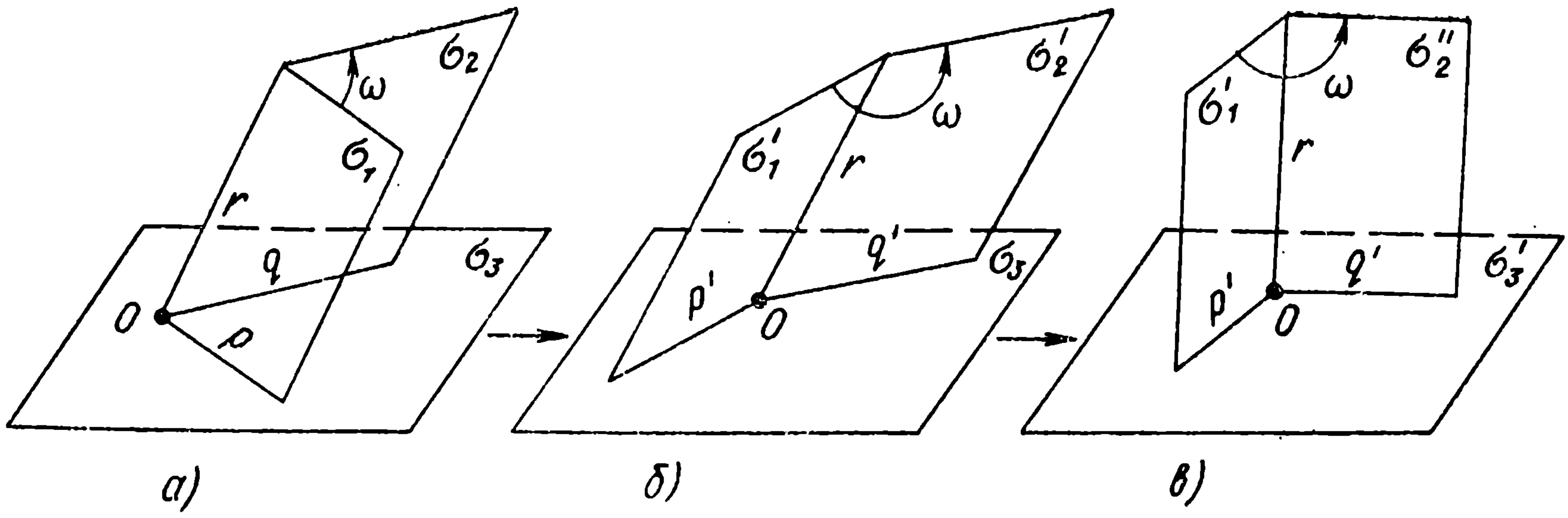


Рис. 47

в одной точке, представляет собой поворотное отражение.

Доказательство. Пусть σ_1, σ_2 и σ_3 — плоскости данных отражений, O — точка пересечения (рис. 47, *а*). Композиция отражений от двух пересекающихся плоскостей σ_1 и σ_2 представляет поворот около линии пересечения r.

Композицию отражений от плоскостей σ_1 и σ_2 можно заменить композицией отражения от плоскостей σ_1' и σ_2', таких, что обе они проходят через прямую r и образуют между собой тот угол, что и плоскости σ_1 и σ_2. При этом одну из плоскостей — или σ_1' или σ_2' — можно выбрать произвольно (рис. 47, *б*).

Плоскость σ_2' выберем так, чтобы она была перпендикулярна плоскости σ_3.

Рассматриваемое преобразование представляется как композиция отражений от плоскостей σ_1', σ_2' и σ_3, проходящих через точку O, причем плоскости σ_2' и σ_3 перпендикулярны друг к другу.

Композиция отражений от взаимно перпендикулярных плоскостей σ_2' и σ_3 есть отражение от линии их пересечения.

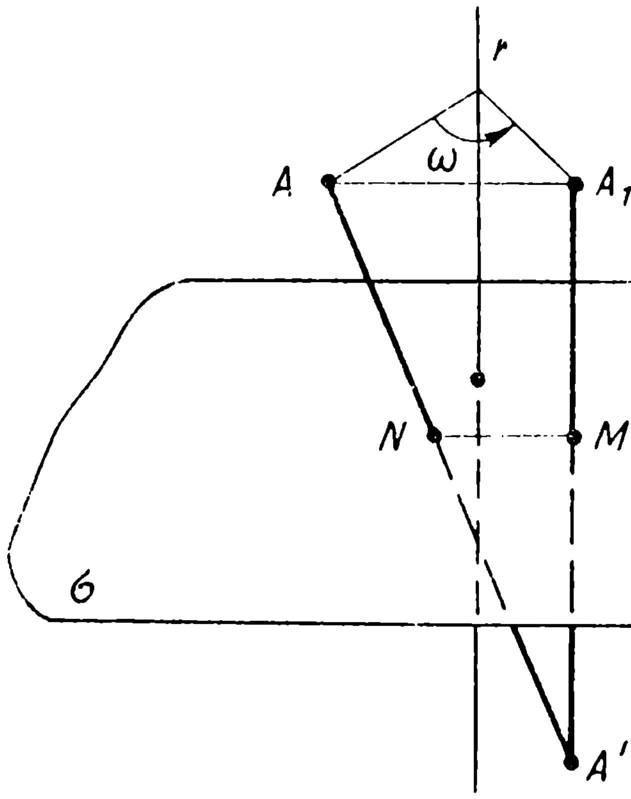
Эта композиция может быть заменена композицией отражений от двух плоскостей σ_2'' и σ_3', а так как одну из плоскостей — или σ_2'' или σ_3' — можно выбрать произвольно, то положим: $\sigma_3' \perp \sigma_1'$ (рис. 47, *в*).

Рассматриваемое преобразование представится при этом как композиция отражений от плоскостей σ_1', σ_2'' и σ_3', проходящих через точку O, причем плоскости σ_1', σ_2'' перпендикулярны к плоскости σ_3'.

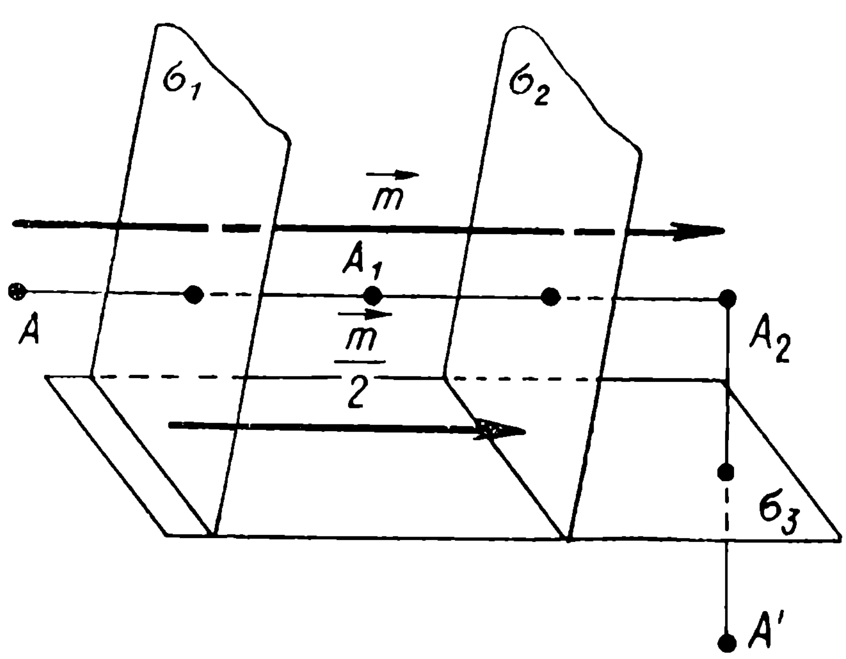
Композиция отражений от плоскостей σ_1' и σ_2'' есть вращение около оси, перпендикулярной к плоскости σ_3'. Следовательно, композиция $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3}$ — поворотное отражение, что и требовалось доказать.

Отметим некоторые свойства поворотного отражения, являющиеся следствиями определения и теоремы 13:

1. При поворотном отражении фигура отображается на несобственно-конгруэнтную ей фигуру.



Р и с. 48



Р и с. 49

2. Неподвижными элементами поворотного отражения являются: центр, ось вращения и плоскость отражения.

3. Отрезки, каждый из которых соединяет две соответственные точки, делятся плоскостью отражения пополам.

В самом деле, пусть точка A вращением около оси r на угол ω отображается на точку A_1, а A_1 отражением от плоскости σ отображается на A' (рис. 48). Прямая AA_1 параллельна плоскости σ. Тогда прямая MN пересечения плоскостей σ и (AA_1A') будет параллельна (AA_1). В треугольнике AA_1A' прямая MN делит сторону A_1A' пополам и параллельна стороне AA_1, следовательно, она является средней линией и делит сторону AA' пополам.

4. Отражение от плоскости и отражение от точки можно рассматривать как частные случаи поворотного отражения с углами, соответственно равными 0 и π.

Плоскости, имеющие общую точку, обычно называют *связкой плоскостей*.

В силу теоремы 13 композиция трех отражений от трех плоскостей, принадлежащих одной связке, является поворотным отражением, ось которого проходит через точку пересечения этих плоскостей (так называемый центр связки).

Рассмотрев определение и теорему о поворотном отражении, можно решить такие задачи:

54. Постройте ось поворотного отражения, которое совмещает одну из двух данных несобственно-конгруэнтных фигур с другой, зная, что данная точка первой фигуры совпадает с соответствующей ей точкой второй.

55. Докажите, что поворотное отражение в общем случае не является преобразованием инволюционным.

56. Чем является композиция двух поворотных отражений, имеющих: а) одну и ту же ось и одну и ту же плоскость поворотного отражения; б) параллельные оси и одну и ту же плоскость поворотного отражения?

§ 8. СКОЛЬЗЯЩЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

Рассмотрим композицию трех отражений от плоскостей, две из которых параллельны между собой, а третья к ним перпендикулярна. Это преобразование является скользящим отражением.

Скользящим отражением называется композиция вектора $\vec{m}$, *параллельного плоскости* σ, *и отражения от плоскости* σ.

Так как вектор $\vec{m}$ (рис. 49) можно представить в виде композиции отражений от двух перпендикулярных вектору $\vec{m}$ плоскостей σ_1 и σ_2, таких, что расстояние от первой плоскости до второй равно $\frac{|\vec{m}|}{2}$, то скользящее отражение является композицией симметрий от трех плоскостей:

$$S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}, \text{ где } \sigma_1 \parallel \sigma_2,\ \sigma_1 \perp \sigma_3 \text{ и } \sigma_2 \perp \sigma_3.$$

Исходя из определения скользящего отражения, можно легко установить некоторые важные свойства этого преобразования:

1. При скользящем отражении фигура отображается на несобственно-конгруэнтную ей фигуру (докажите самостоятельно).

2. Неподвижными элементами скользящего отражения являются прямые, параллельные данному вектору и принадлежащие плоскости отражения, сама плоскость отражения и плоскости, перпендикулярные плоскости отражения и параллельные вектору, неподвижных точек нет.

3. Отрезки, соединяющие соответственные точки фигуры и ее образа при скользящем отражении, делятся плоскостью отражения пополам (докажите самостоятельно).

4. Фигурирующая в определении скользящего отражения композиция вектора и отражения от плоскости обладает переместительным свойством.

Для того чтобы доказать это, достаточно проанализировать рисунок 50.

5. Отражение от плоскости можно рассматривать как частный случай скользящего отражения, при нулевом векторе.

В двух предыдущих параграфах мы рассматривали композицию отражений от трех плоскостей, лежащих в связке. Пусть теперь линии пересечения трех плоскостей будут параллельны. Найдем композицию трех отражений от трех расположенных таким образом плоскостей.

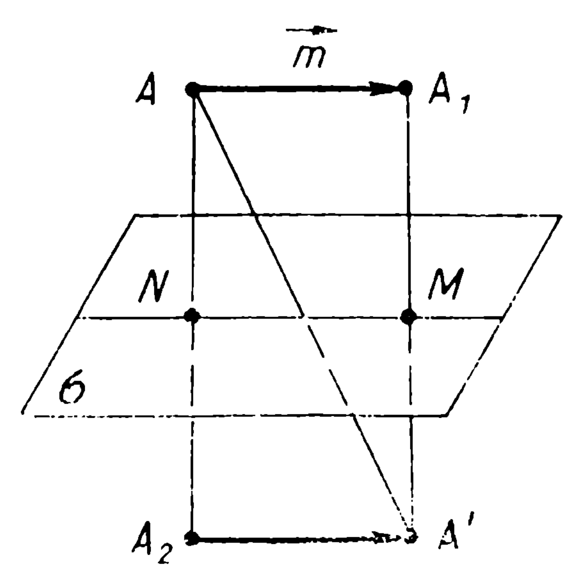


Рис. 50

Пусть даны три плоскости: σ_1, σ_2 и σ_3, три линии пересечения которых параллельны.

Обозначим линию пересечения плоскостей σ_2 и σ_1 через r, а линию пересечения плоскости σ_2 и σ_3 — через l (рис. 51); по условию, $r \parallel l$.

Композиция $S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$ есть вращение около оси r. Заменим ее композицией $S_{\sigma_2'} \circ S_{\sigma_1'}$, причем плоскости σ_1' и σ_2' проходят через ось r и угол между ними равен углу между плоскостями σ_1 и σ_2; при этом плоскость σ_2' выберем так, чтобы она была перпендикулярна σ_3.

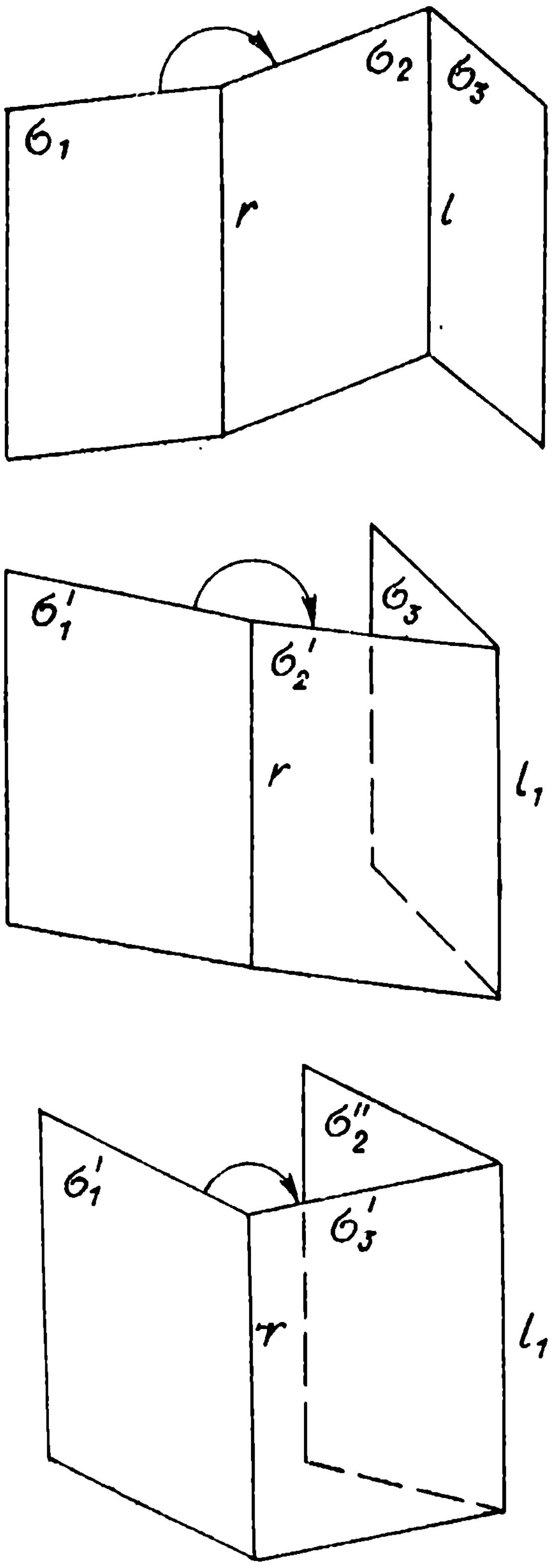


Рис. 51

Пусть линия пересечения плоскостей σ_2' и σ_3 есть l_1. Композиция $S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2'}$ тогда является осевой симметрией с осью l_1. Заменим эту осевую симметрию композицией двух отражений $S_{\sigma_3'} \circ S_{\sigma_2''}$, причем σ_2'' и σ_3' проходят через l_1 и образуют между собой такой же угол, что и плоскости σ_2' и σ_3, т. е. $\sigma_2'' \perp \sigma_3'$. Кроме того, плоскость σ_3' выберем так, чтобы она была перпендикулярна плоскости σ_1'.

Следовательно, плоскости σ_1' и σ_2'' параллельны между собой, так как они перпендикулярны плоскости σ_3' и $l_1 \parallel r_1$.

Таким образом, композиция симметрий $S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$ приводится к композиции $S_{\sigma_3'} \circ S_{\sigma_2''} \circ S_{\sigma_1'}$, которая является скользящим отражением.

Результат этих рассуждений сформулируем в виде теоремы:

Теорема 14. **Композиция трех отражений от трех плоскостей, линии пересечения которых параллельны, есть скользящее отражение.**

Можно также без особого труда доказать, что композиция отражений от трех плоскостей, две из которых параллельны, а третья их пересекает (под любым углом), является скользящим отражением. Доказательство в принципе не отличается от доказательства только что приведенной теоремы, поэтому мы его не приводим.

Подведем итоги.

В зависимости от взаимного расположения трех плоскостей композиция отражений от этих плоскостей сводится к следующим преобразованиям:

1. **Отражение от плоскости:** все три плоскости принадлежат одному пучку (или параллельны, рис. 39, *а*, или пересекаются по одной прямой, рис. 39, *б*).

2. **Отражение от точки:** все три плоскости пересекаются в одной точке, причем все плоскости взаимно перпендикулярны между собой (рис. 40, *а*).

3. **Поворотное отражение:** все три плоскости пересекаются в одной точке (рис. 40, *б*).

4. **Скользящее отражение:** линии пересечения трех плоскостей параллельны (рис. 41).

§ 9. ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ (ОТРАЖЕНИЕ ОТ ЧЕТЫРЕХ ПЛОСКОСТЕЙ)

Рассмотрим предварительно такие упражнения:

57. Каким преобразованием является композиция отражений от четырех плоскостей, параллельных между собой (рис. 52)? (Параллельный перенос.)

58. Каким преобразованием является композиция отражений от четырех пересекающихся плоскостей по одной прямой (рис. 53)? (Вращение.)

59. Каким преобразованием является композиция четырех отражений, если три плоскости параллельны, а четвертая перпендикулярна к ним (рис. 54)? (Отражение от прямой.)

60. Рассмотрите композицию отражений от четырех плоскостей σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4, когда $\sigma_1 \parallel \sigma_2$; $\sigma_3 \parallel \sigma_4$ (первая пара плоскостей не обязательно параллельна второй). Возможны следующие случаи расположения плоскостей:

а) σ_2 и σ_3 образуют произвольный угол (рис. 55),

б) $\sigma_2 \perp \sigma_3$ (рис. 56). (Параллельный перенос.)

В случае а) мы получили преобразование, не рассмотренное выше. Это преобразование является винтовым движением. Дадим ему определение:

Винтовым движением называется композиция поворота и параллельного переноса

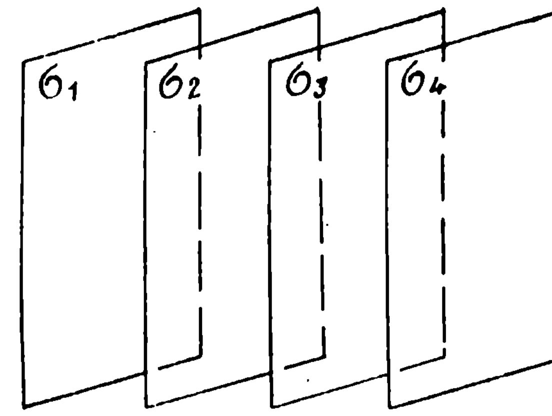


Рис. 52

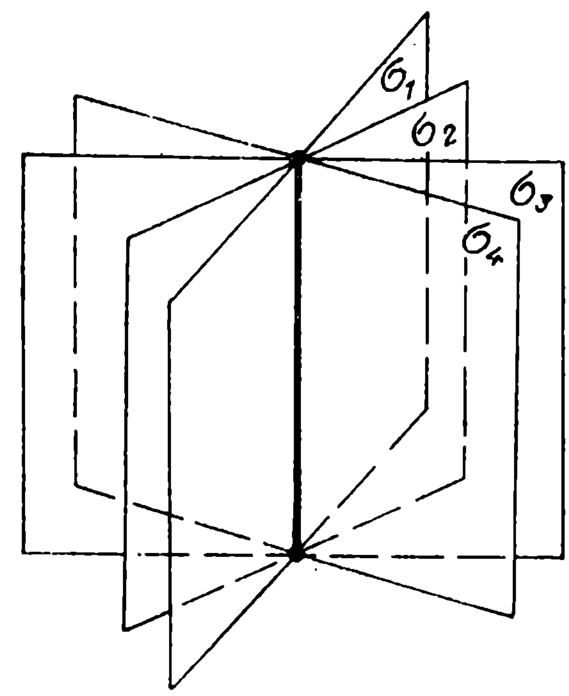


Рис. 53

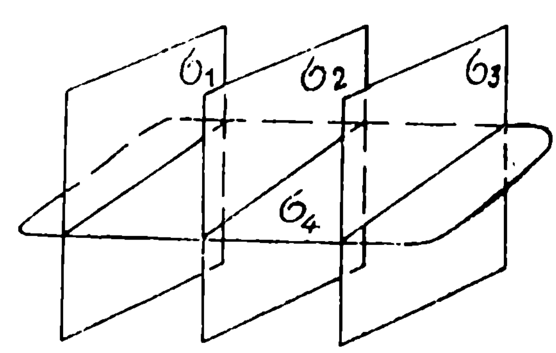


Рис. 54

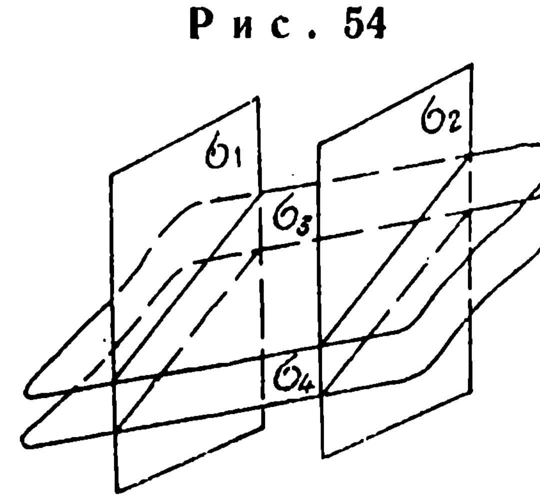


Рис. 55

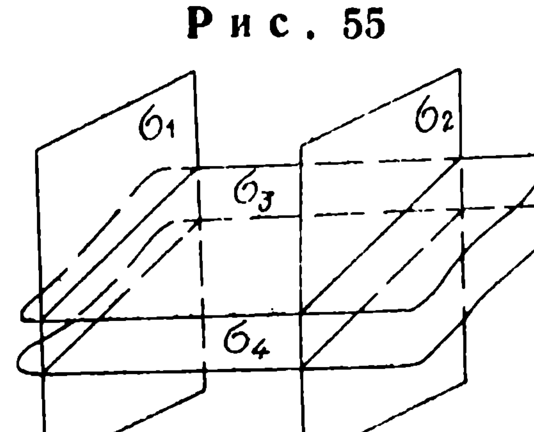


Рис. 56

при условии, что направление переноса параллельно оси поворота.

При этом ось поворота называется винтовой осью, угол поворота — углом винтового движения.

Винтовое движение можно считать заданным, если известны винтовая ось, угол винтового движения и задан перенос. Такое преобразование обозначается так: $\vec{r}_\omega(A) = A'$, где $\vec{r}$ — данный вектор, параллельный винтовой оси, а ω — угол винтового движения, совпадающий по величине и направлению с углом поворота.

Винтовое движение называется *левым и отрицательным*, если данный вектор направлен в отрицательное полупространство, по отношению к плоскости угла вращения*.

Винтовое движение называется *правым и положительным*, когда вектор направлен в положительное полупространство по отношению к плоскости угла вращения.

Прежде чем рассматривать свойство винтового движения, докажем следующую очень важную теорему:

Теорема 15 (Моцци). **Любые две собственно-конгруэнтные фигуры можно отобразить одну на другую путем винтового движения.**

Доказательство. Пусть некоторое преобразование отображает одну из точек A первой фигуры Φ на точку A' второй фигуры Φ', собственно-конгруэнтной фигуре Φ (рис. 57).

Вектор $\overrightarrow{AA'}$ отображает точку A на точку A', а фигуру Φ — на некоторую фигуру Φ_1, собственно-конгруэнтную фигуре Φ, а

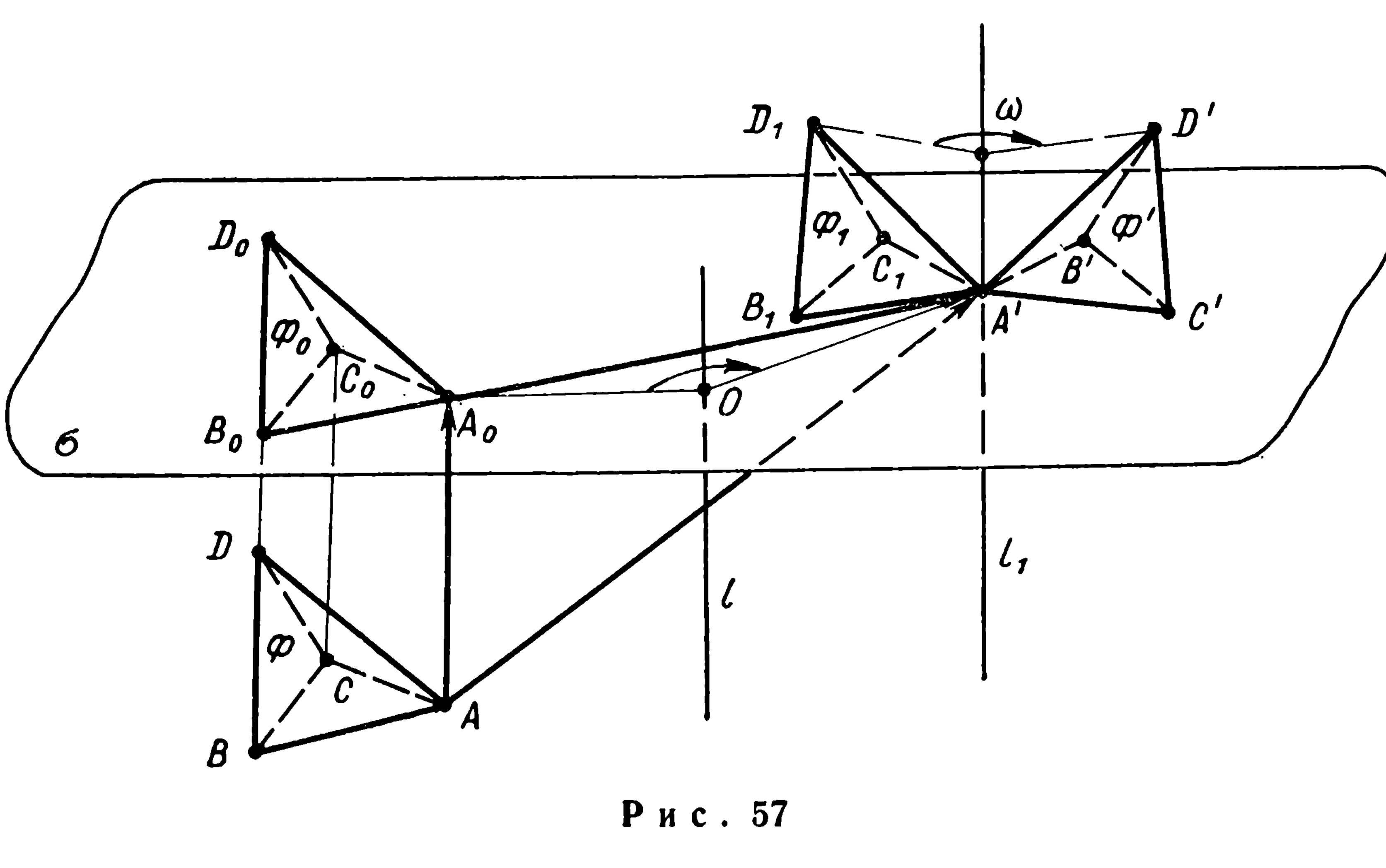


Рис. 57

* Плоскость угла ω разбивает пространство на два полупространства. Точки оси, из которых угол виден как положительный (т. е. получен путем вращения против часовой стрелки), назовем положительным. Тогда множество точек, находящихся с положительными точками в одном полупространстве, мы назовем положительным полупространством.

следовательно, и фигуре Φ'. Собственно-конгруэнтные фигуры Φ_1 и Φ' имеют общую точку A'.

Тогда перемещение, отображающее фигуру Φ_1 на Φ', есть перемещение с неподвижной точкой A'. По теореме Даламбера (см. стр. 44) такое перемещение есть поворот около оси l_1, проходящей через точку A'.

Теперь видно, что перемещение, отображающее фигуру Φ на Φ', есть композиция вектора $\overrightarrow{AA'}$ и поворота около некоторой оси l_1, проходящей через точку A'.

Проведем плоскость σ через точку A' перпендикулярно к оси l_1. Пусть точка A_0 будет прямоугольной проекцией точки A на плоскость σ. Вектор $\overrightarrow{AA'}$ можно рассматривать как композицию векторов $\overrightarrow{AA_0}$ и $\overrightarrow{A_0A'}$. Тогда отображение фигуры Φ на фигуру Φ' можно рассматривать как композицию трех перемещений: вектора $\overrightarrow{AA_0}$, вектора $\overrightarrow{A_0A'}$ и поворота около оси l_1 на некоторый угол ω.

Рассмотрим композицию последних двух перемещений. Вектор $\overrightarrow{A_0A'}$ представим в виде композиции $S_\beta \circ S_\alpha$ двух отражений от плоскостей (стр. 39, теорема 5); при этом плоскость β выберем так, чтобы она проходила через ось l_1. Поворот около оси l_1 на угол ω представим в виде композиции $S_\gamma \circ S_\beta$ двух отражений от плоскостей β и γ (стр. 43, теорема 7), пересекающихся по прямой l_1 и образующих угол $\frac{\omega}{2}$; при этом одну из плоскостей можно выбрать произвольно, поэтому в качестве таковой мы возьмем плоскость β. Отсюда видно, что композиция вектора $\overrightarrow{A_0A'}$ и поворота с осью l на угол ω есть композиция четырех отражений от плоскостей $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\beta \circ S_\alpha$. Нетрудно заметить, что эта композиция сводится к композиции двух отражений $S_\gamma \circ S_\alpha$ от плоскостей α и γ, причем эти плоскости пересекаются по прямой l, параллельной l_1, и образуют угол $\frac{\omega}{2}$. Следовательно, композиция $S_\gamma \circ S_\alpha$ есть поворот на угол ω около оси l, перпендикулярно плоскости σ.

Итак, в итоге мы получили, что отображение фигуры Φ на фигуру Φ' есть композиция следующих перемещений: вектора $\overrightarrow{AA_0}$ и поворота около оси l, параллельной направлению этого вектора. По определению это есть винтовое движение. Тем самым теорема доказана.

Теперь отметим основные свойства винтового движения:

1. Из определения следует, что при винтовом движении фигура отображается на собственно-конгруэнтную ей фигуру.

2. Единственным неподвижным элементом винтового движения, вообще говоря, является винтовая ось. Если угол винтового движения отличен от развернутого, то винтовое движение не имеет неподвижных плоскостей; если он равен развернутому, то неподвижными будут все плоскости, проходящие через винтовую ось.

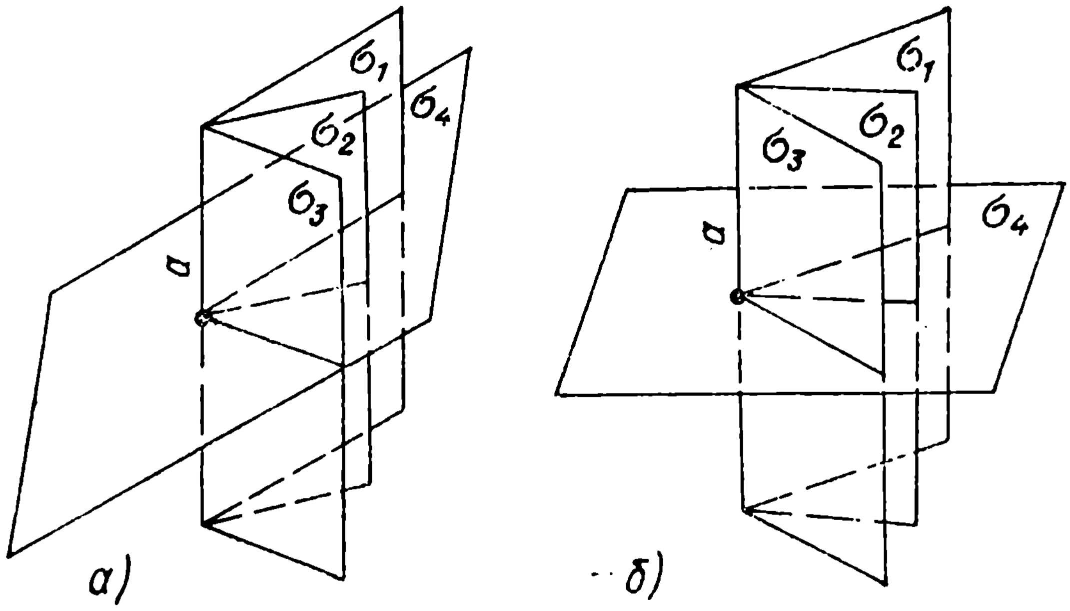


Рис. 58

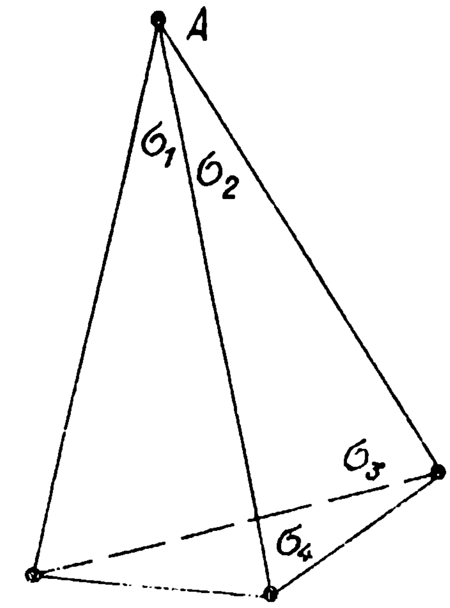


Рис. 59

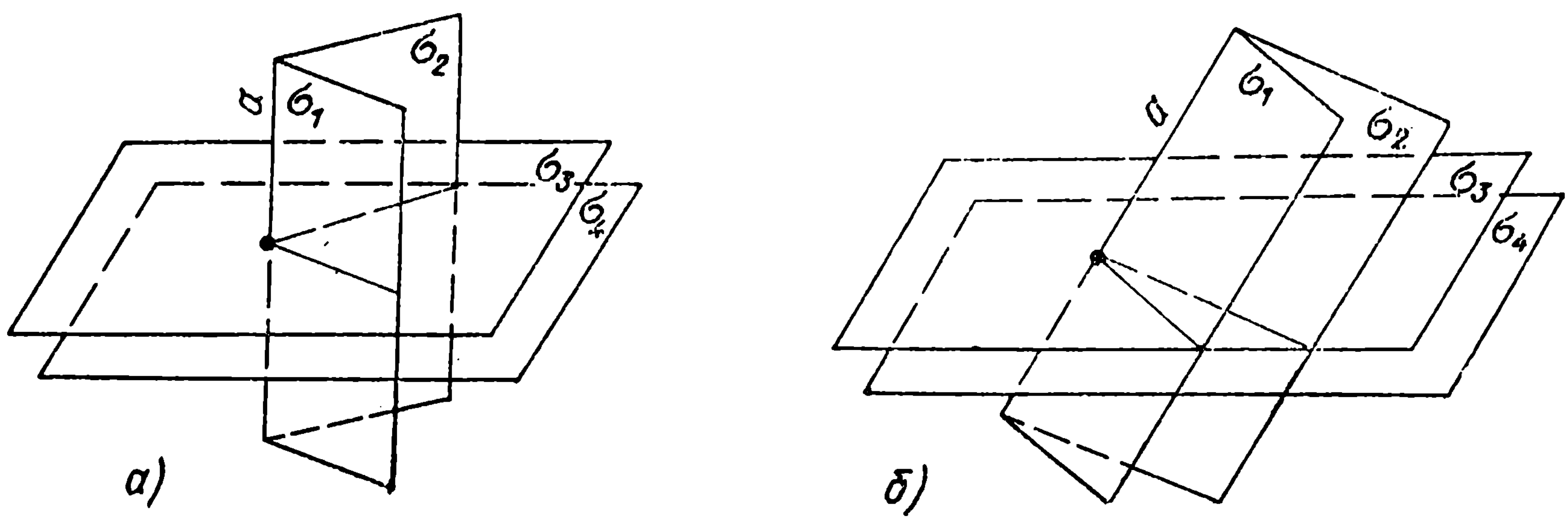


Рис. 60

3. Параллельный перенос и вращение можно рассматривать как частные случаи винтового движения: в случае параллельного переноса угол вращения ω равен 0, в случае вращения вектор $\vec{m}$ равен $\vec{0}$. Для закрепления материала по этой теме полезно рассмотреть следующие задачи:

61. Рассмотрите композицию отражений от четырех плоскостей: σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, когда плоскости σ_1, σ_2 и σ_3 пересекаются по одной прямой a, которая пересекает плоскость σ_4. Рассмотрите два случая: а) $a \perp \sigma_4$ (рис. 58, *б*); б) a и σ_4 пересекаются под произвольным углом (рис. 58, *а*).

62. Определите, какое преобразование получится в результате композиции четырех отражений: $S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3} \circ S_{\sigma_4}$, где $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 = A$, а σ_4 пересекает все три плоскости σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 59).

63. Рассмотрите композицию четырех отражений от плоскостей σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4, если $\sigma_1 \cap \sigma_2 = a$, $\sigma_3 \parallel \sigma_4$. Рассмотрите случаи: а) $a \perp \sigma_3$ (рис. 60, *а*); б) a пересекает под произвольным углом плоскость σ_3 (рис. 60, *б*).

Рассмотрим теперь более общие случаи решения приведенных задач:

64. Постройте ось винтового движения, при котором одна из двух данных собственно-конгруэнтных фигур отображается на другую.

Р е ш е н и е. Возьмем три, не лежащие на одной прямой точки A, B и C фигуры Φ и пусть им соответствуют точки A', B' и C' собственно-конгруэнтной ей фигуры Φ'.

Путем параллельного переноса $\overrightarrow{AA'}$ отобразим точки B и C на точки B_1 и C_1 (точка A отобразится на A'). Тогда фигура Φ_1 (определяемая тремя точками A', B_1 и C_1) собственно-конгруэнтна фигуре Φ', причем Φ_1 и Φ' имеют одну общую точку A', которая сама себе соответствует. Строим ось поворота l_1 фигур Φ_1 и Φ'. Угол поворота определяется полуплоскостями, выходящими из l_1 и проходящими через B' и B_1.

Далее проведем плоскость $\sigma_1 \perp l_1$. Через точку A проведем перпендикуляр AA_0 к плоскости σ. В плоскости σ строим точку O, такую, что $\widehat{A_0OA} = \omega$.

Прямая l, проходящая через O и перпендикулярная к σ, и будет искомой.

65. Постройте плоскость и ось поворотного отражения или же плоскость скользящего отражения, при котором одна из двух данных несобственно-конгруэнтных фигур совмещается с другой.

Р е ш е н и е. Пусть имеем несобственно-конгруэнтные фигуры Φ и Φ_1. Точки A_1, B_1, C_1 ... — середины отрезков AA', BB', CC', соединяющих попарно соответственные точки обеих фигур, лежат в искомой плоскости σ, в случае поворотного отражения эта задача рассмотрена в § 7, а в случае скользящего отражения — в § 8. Точки A, B и C можно выбрать так, чтобы середины соответствующих отрезков AA', BB' и CC' не лежали на одной прямой. Действительно, из свойств поворотного и скользящего отражений легко вывести, что всякая точка M_0 плоскости отражения σ есть середина некоторого отрезка MM', соединяющего две соответственные точки: M и M'. Середины трех таких отрезков, лежащие на одной прямой, определяются положением плоскости σ.

Пусть A_0, B_0, C_0 ... и A_0', B_0', C_0'... — проекции на плоскость σ точек A, B, C — первой фигуры и точек A', B', C' — второй. Центр O поворота плоскости σ, совмещающего фигуру $A_0B_0C_0$... с фигурой $A_0'B_0'C_0'$..., и будет центром поворотного отражения, а перпендикуляр к плоскости σ в точке O — его осью.

Если фигуры $A_0B_0C_0$... и $A_0'B_0'C_0'$... получаются одна из другой с помощью переноса, то данные фигуры получаются одна из другой с помощью скользящего отражения.

Если точки A_0, B_0, C_0 ... совпадают с A_0', B_0', C_0'... (достаточно совпадения двух точек), то данные фигуры, очевидно, симметричны относительно плоскости σ.

§ 10. ПОНЯТИЕ О ГРУППЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Мы познакомились с различными видами перемещений плоскости и пространства, установили основные свойства этих перемещений. В этом параграфе мы займемся систематизацией полученных знаний. Для этого будет введено понятие группы преобразований и рассмотрена группа перемещений. В свое время Ф. Клейн определил геометрию как науку, изучающую группы геометрических преобразований. Это означает, что данный параграф призван служить связующим звеном вопросов геометрии, изучаемых в школе, и геометрической науки.

Множество преобразований, изученных нами, обладают определенными общими для всех их признаками.

Одним из таких признаков является следующее замечательное свойство: любые две точки A и B отображаются на такие точки A' и B', что расстояние $|A'B'|$ равно расстоянию $|AB|$. Эти преобразования, сохраняющие расстояния между точками, мы называли перемещениями. В силу определения конгруэнтности фигур, можно сказать, что перемещения отображают фигуру на конгруэнтную ей фигуру. Но конгруэнтность фигур бывает двоякой: имеются фигуры собственно-конгруэнтные и несобственно-конгруэнтные. В соответствии с этим различают и два вида перемещений: собственные перемещения (отображающие фигуру на собственно-конгруэнтную ей фигуру) и несобственные перемещения (отображающие фигуру на несобственно-конгруэнтную ей фигуру).

Рассмотренные нами перемещения, следовательно, можно разделить на два типа:

1. Собственные перемещения: параллельный перенос, вращение вокруг оси и винтовое движение.

2. Несобственные перемещения: отражение от плоскости, поворотное отражение (центральную симметрию можно рассматривать как частные случаи поворотных отражений) и скользящее отражение.

Подойдем к определению понятия собственных и несобственных перемещений несколько с другой точки зрения.

Композиция четного числа отражений от плоскости отображает фигуру на собственно-конгруэнтную ей фигуру, а композиция нечетного числа отражений от плоскости — на несобственно-конгруэнтную ей фигуру. Отсюда можно сделать такое замечание: композицию четного числа отражений от плоскостей можно назвать собственным перемещением, а нечетного числа отражений — несобственным перемещением.

А теперь поставим перед собой следующий вопрос: исчерпывают ли изученные нами преобразования множество преобразований, названных нами перемещением? Может быть, имеются еще какие-то преобразования, не изученные нами, но удовлетворяющие условиям определения понятия перемещения?

Исследуем сначала собственные перемещения. Ясно, что каково бы ни было четное число отражений от плоскости, их композиция отображает фигуру на собственно-конгруэнтную ей фигуру. В силу теоремы Моцци, это преобразование можно всегда свести самое большее к композиции четырех отражений от плоскостей, т. е. к винтовому движению, или в частных случаях к параллельному переносу или вращению.

Пусть теперь фигура Ф отображается на фигуру Ф′ посредством композиции любого нечетного числа отражений от плоскости. Ясно, что фигуры Ф и Ф′ несобственно-конгруэнтны. Возьмем две соответственные точки — A и A' — и построим для них плоскость отражения, для чего достаточно через середину отрезка AA' провести перпендикулярную к нему плоскость, которая и будет искомой (причем эта плоскость будет единственной: через середину отрезка можно провести одну и только одну перпендикулярную к нему плоскость). Подвергнем теперь фигуру Ф′ отражению от этой плоскости, получим фигуру $Ф_1$, которая будет собственно-конгруэнтна фигуре Ф′ и которая имеет с ней общую точку A'. В силу теоремы Даламбера, фигуру $Ф_1$ можно отобразить на фигуру Ф′ с помощью вращения, т. е. с помощью композиции двух отражений от плоскостей. Таким образом, преобразование фигуры в несобственно-конгруэнтную ей фигуру можно всегда свести самое большее к трем отражениям от плоскостей, т. е. с помощью поворотного отражения (или центральной симметрии), скользящей симметрии или, как частный случай, с помощью одного отражения от плоскости.

Итак, собственные перемещения исчерпываются параллельными переносами, вращениями и винтовыми движениями, несобственные— отражениями от плоскости, поворотными отражениями и скользящими отражениями.

Каждый из перечисленных видов перемещений характеризуется числом отражений от плоскости. Но наряду с этим каждый вид перемещений можно охарактеризовать еще и неподвижными элементами. Эти характеристики занесем в следующую таблицу:

Вид движений	Число отражений от плоскости	Неподвижные элементы
Несобственные:		
1. Отражение от плоскости	1	а) Точки плоскости отражения; б) прямые, лежащие в плоскости отражения, и прямые, перпендикулярные плоскости отражения; в) плоскость отражения; г) плоскости, перпендикулярные плоскости отражения
2. Поворотное отражение — общий случай	3	а) Центр поворотного отражения; б) ось поворотного отражения; в) плоскость поворотного отражения

Вид движений	Число отражений от плоскости	Неподвижные элементы
Частный случай — центральная симметрия	3	а) Центр симметрии; б) прямые, проходящие через центр симметрии; в) плоскости, проходящие через центр симметрии
3. Скользящие отражения	3	а) Прямые, параллельные направлению переноса и лежащие в плоскости отражения; б) плоскость отражения и плоскости, перпендикулярные плоскости отражения и параллельные направлению переноса
Собственные:		
1. Параллельный перенос	2	а) Прямые, параллельные направлению переноса; б) плоскости, параллельные направлению переноса
2. Вращение — общий случай	2	а) Точки оси вращения; б) ось вращения; в) плоскости, перпендикулярные оси вращения
Частный случай — осевая симметрия	2	а) Точки оси симметрии; б) ось симметрии и прямые, перпендикулярные оси симметрии и пересекающие ее; в) плоскости, перпендикулярные оси симметрии, и плоскости, проходящие через ось симметрии
3. Винтовое движение	4	а) Винтовая ось; б) плоскости, проходящие через винтовую ось, если угол вращения равен π

Прежде чем определить группу перемещений, дадим общее понятие группы, являющееся одним из важнейших понятий современной математики.

Множество G элементов произвольной природы (например, чисел, отображений, преобразований) называется **группой**, если выполнены следующие четыре условия:

1. *Задан закон композиции*, по которому каждой паре элементов a, b множества G ставится в соответствие некоторый третий элемент того же множества, называемый обычно **произведением** элементов a и b и обозначаемый ab или $a \cdot b$.

2. Закон *ассоциативности*: для каждых трех элементов a, b,

c множества G имеет место равенство:

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

3. В G *существует одна единица* E, т. е. элемент, обладающий тем свойством, что $aE = Ea = a$ для всех a из G (элемент E называется единичным).

4. Для каждого a из G существует в G *один обратный элемент* a^{-1}, т. е. элемент, обладающий тем свойством, что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = E.$$

Число элементов, составляющих группу, называют ее порядком. Если это число конечное, то *группа* называется *конечной*, если бесконечное, то *бесконечной*.

Группа называется *абелевой* или *коммутативной*, если

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Примером бесконечной коммутативной группы может служить множество действительных чисел относительно сложения, множество рациональных чисел (исключая число 0) относительно умножения и т. д.

Нетрудно заметить, что совокупность преобразований образует группу (называемую группой преобразований).

В самом деле, проверим выполнение четырех условий (аксиом группы), взяв в качестве элементов множества G перемещения f и в качестве групповой операции (произведения) — композицию преобразований:

1) Композиция перемещений есть перемещение.

2) Композиция перемещений обладает ассоциативным свойством $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$.

3) В качестве единичного элемента можно взять тождественное преобразование: $f \circ E = E \circ f = f$.

4) Для каждого перемещения f существует ему обратное перемещение f^{-1}: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$*.

Можно так сформулировать определение группы перемещений: *множество перемещений образует группу, если оно с каждым перемещением содержит обратное ему и вместе с каждыми двумя перемещениями — их композицию* (включая композицию любого преобразования на себя и на обратное ему).

Множество перемещений может содержать, в свою очередь, такое множество (точнее, подмножество) перемещений, которое само является группой (в этом случае говорят, что эта группа есть подгруппа группы перемещений).

Для того чтобы некоторое подмножество группы перемещений было группой, достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

---

* Все условия уже доказаны для перемещений плоскости в § 1. Для перемещений пространства доказательства аналогичны.

1) композиция двух перемещений, принадлежащих данному множеству, есть перемещение этого же множества;

2) для каждого преобразования D данного множества перемещений существует обратное ему перемещение D^{-1}, принадлежащее этому же множеству (докажите самостоятельно).

Теперь нам остается проверить, какие из перемещений, рассмотренных нами выше, являются группами, а какие — нет.

Ясно, что ни одно из множеств несобственных перемещений не является группой, так как композиция любых двух из них сводится к композиции четного числа отражений от плоскости и поэтому является собственным перемещением, т. е. композиция несобственных перемещений не принадлежит множеству несобственных перемещений.

Множество же собственных перемещений является группой, называемой группой собственных перемещений. В самом деле, композиция собственных перемещений сводится к композиции четного числа отражений от плоскости и поэтому является собственным же перемещением. Преобразование, обратное собственному перемещению, также является собственным перемещением, так как оно сводится к композиции четного числа отражений от плоскости.

Исследуем теперь вопрос о том, являются ли группами множества конкретных собственных перемещений.

Параллельные переносы. Композиция параллельных переносов есть параллельный перенос. Перенос, обратный переносу $\vec{m}$, является также параллельным переносм $(-\vec{m})$. Следовательно, множество параллельных переносов есть группа. Эта группа называется *группой параллельных переносов.*

Вращения. Преобразованием, обратным вращению R_r^{ω} с осью r и углом ω, является вращение $R_r^{-\omega}$ с той же осью r и углом вращения $-\omega$.

Как мы имели возможность убедиться (§ 5), композиция двух вращений может быть и вращением, и параллельным переносом. Следовательно, множество только одних вращений группы не образует. Композиция двух вращений со скрещивающимися осями не есть вращение, поэтому множества вращения группы не образуют.

Винтовые движения. Преобразованием, обратным винтовому движению $R_{\vec{r}}^{\omega}$, будет винтовое движение $R_{-\vec{r}}^{-\omega}$, у которого вектор переноса будет равен $-\vec{r}$ и угол вращения равен $-\omega$.

Композиция винтовых движений есть композиция четного числа отражений от плоскости и, по теореме Моцци, является винтовым движением (с включением вращений и параллельных переносов как частных случаев винтового движения).

Следовательно, множество винтовых движений есть группа, которую можно назвать группой винтовых движений. Изучая свойства винтовых движений, можно заметить, что винтовое движение является самым общим видом собственных перемещений, поэтому группы собственных перемещений и группы винтовых движений можно отождествлять.

Для закрепления материала по этой теме полезно рассмотреть следующие вопросы:

66. Является ли группой перемещений множество всех перемещений, меняющих ориентацию?

67. Является ли группой перемещений а) множество всех перемещений, оставляющих неподвижной точку O? б) множество всех перемещений, каждое из которых имеет хотя бы одну неподвижную точку?

68. Докажите, что если G_1 и G_2 — некоторые группы перемещений, то $G_1 \cap G_2$ также есть группа перемещений.

69. Является ли группой перемещений множество всех отражений от одной плоскости (зеркальных симметрий); центральных симметрий?

ГЛАВА II
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

§ 1. ГОМОТЕТИЯ

В «Введении» нами были рассмотрены вопросы, связанные с изучением преобразований подобия плоскости и конкретного вида этих преобразований — гомотетии. В случае пространства основные определения и свойства преобразований подобия совпадают с уже сформулированными, учитывая замену плоскости на пространство. Это же относится и к определению подобных фигур. Вместе с тем в пространстве мы отмечаем дополнительные свойства, о которых в основном здесь и пойдет речь.

Построение гомотетичных фигур в пространстве показано на рисунках 61 и 62.

Можно доказать такую теорему:

Теорема 1. **При гомотетии плоскость отображается на параллельную ей плоскость.**

Доказательство имеется в учебном пособии по геометрии для X класса.

Теорема 2. **При гомотетии угол отображается на конгруэнтный угол и все расстояния между точками умножаются на $|k|$, где k — коэффициент гомотетии.**

Доказательство. Возьмем точки A, B и C, не лежащие на одной и той же прямой (рис. 63). Пусть $H_O^k(A) = A_1$, $H_O^k(B) = B_1$, $H_O^k(C) = C_1$. Так как $(AB) \parallel (A_1B_1)$ и $(BC) \parallel (B_1C_1)$ и вместе

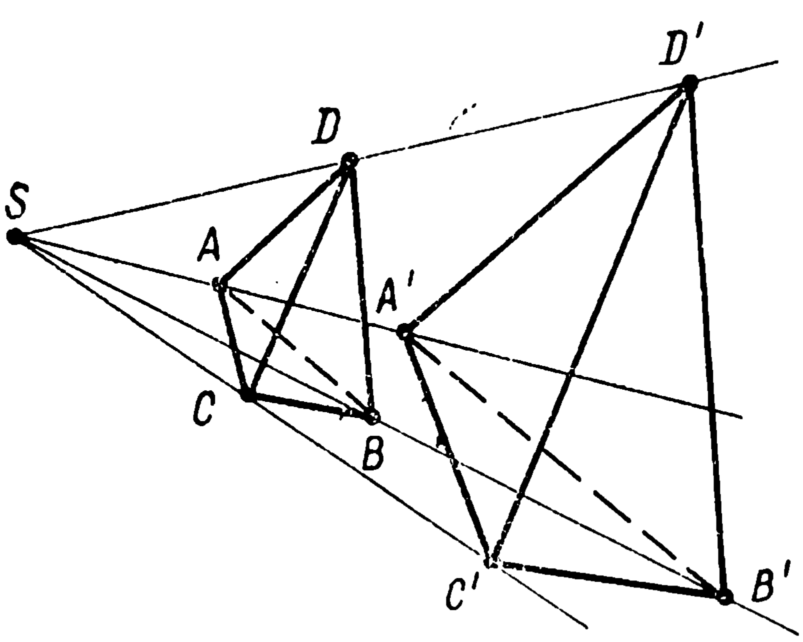


Рис. 61

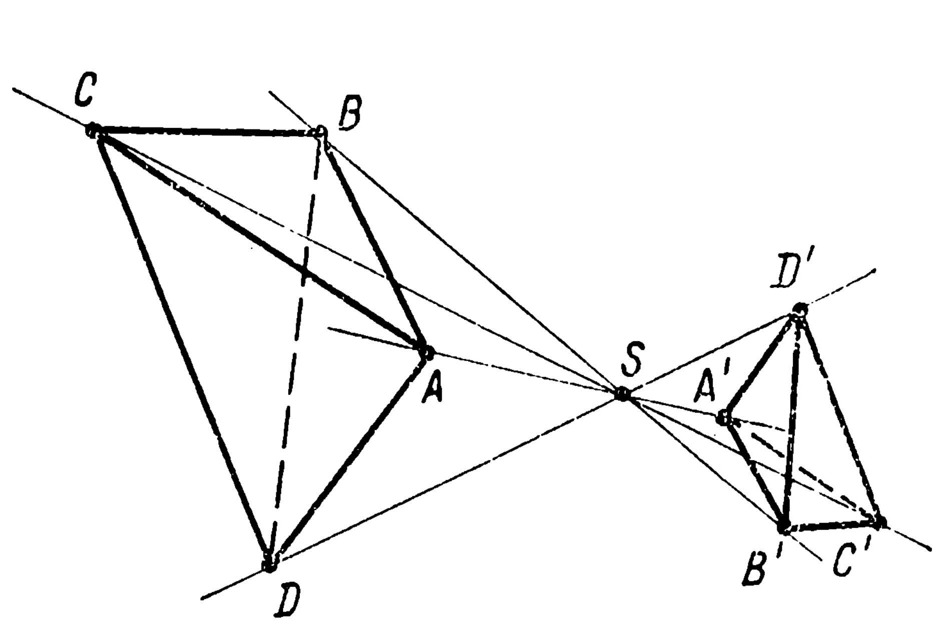


Рис. 62

с тем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$ сонаправлены при гомотетии с положительным коэффициентом и противоположно направлены при гомотетии с отрицательным коэффициентом, то $\angle ABC \cong \cong \angle A_1B_1C_1$, как углы между направлениями. Точки O, A, B, A_1, B_1 лежат в одной и той же плоскости. Поэтому мы можем использовать известное свойство плоской гомотетии, согласно которому

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{|OB_1|}{|OB|} = k.$$

Следствия. 1) При гомотетии с положительным коэффициентом данная фигура отображается на одинаково ориентированную.

При гомотетии с отрицательным коэффициентом данная фигура отображается на фигуру, противоположно ориентированную.

Рассмотрим гомотетию с центром O и коэффициентом $k > 0$.

Возьмем треугольник ABC, расположенный так, что его плоскость не проходит через центр O (рис. 63). $H_O^k(A'B'C') = A_1B_1C_1$, а в силу предыдущей теоремы $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$. Наблюдатель, смотрящий из точки O на эти треугольники, увидит их совместившимися и, значит, одинаково ориентированными. Поэтому и фигуры $OA'B'C'$ и $OA_1B_1C_1$ являются одинаково ориентированными.

Пусть теперь $k < 0$. Возьмем треугольник ABC, плоскость которого не проходит через центр O (рис. 63), и пусть опять $H_O^k(ABC) = A_1B_1C_1$. В этом случае для наблюдателя, находящегося в точке O, треугольник $A_1B_1C_1$ одинаково ориентирован с треугольником $A'B'C'$ центрально-симметричным с треугольником ABC относительно центра O. Но мы знаем, что фигуры $OABC$ и $OA'B'C'$ противоположно ориентированы. Поэтому противоположно ориентированы и фигуры $OABC$ и $OA_1B_1C_1$.

2) Соответственные трехгранные углы гомотетичных фигур, а следовательно, и соответственные двугранные углы конгруэнтны.

Пусть $SABC$ — трехгранный угол фигуры Φ и S', A', B', C' — точки фигуры Φ', соответствующие точкам S, A, B и C. Трехгранные углы $SABC$ и $S'A'B'C'$ будут конгруэнтны по конгруэнтности плоских углов. Соответственные двугранные углы гомотетичных фигур конгруэнтны.

Одинаково ориентированные гомотетичные фигуры называют собственно-гомотетичными, а противоположно ориентированные гомотетичные фигуры — несобственно-гомотетичными.

3) Неподвижными элементами в гомотетии являются:

а) центр O,

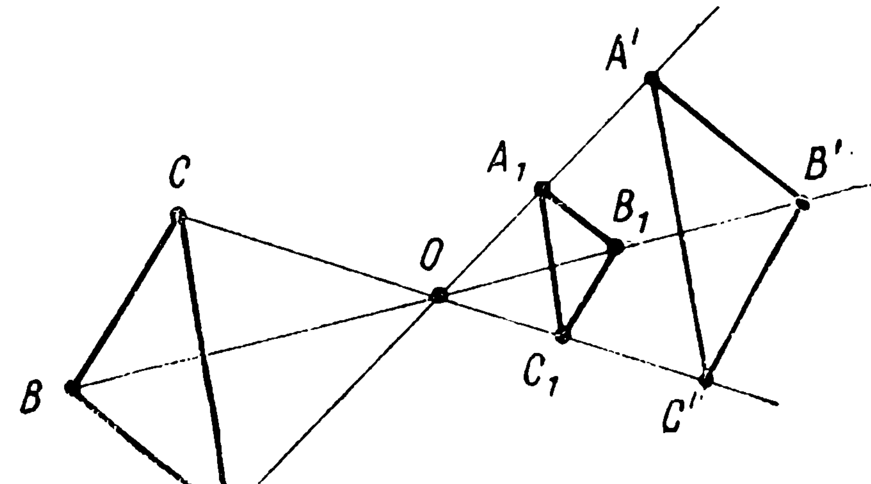


Рис. 63

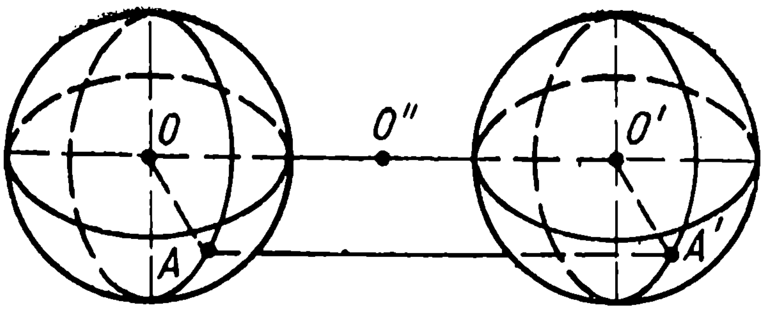


Рис. 64

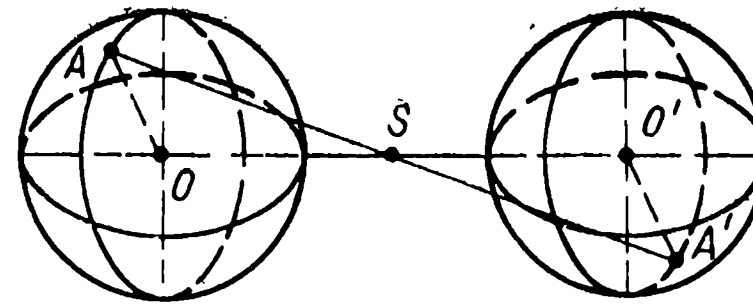


Рис. 65

б) все прямые, проходящие через точку O,

в) все плоскости, проходящие через точку O.

4) Симметричные относительно некоторой точки, тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ являются также и гомотетичными между собой.

5) Каждые две конгруэнтные сферы с центрами в O и O' (рис. 64) можно рассматривать как преобразованные одна из другой при помощи отражения от точки O'', т. е. гомотетии с коэффициентом $k = -1$, или параллельным переносом $\overrightarrow{OO'}$*.

Для нахождения центра симметрии (гомотетии) двух конгруэнтных сфер нужно провести два противоположно направленных луча — OA и $O'A'$, тогда точка S, являющаяся точкой пересечения прямых OO' и AA' (рис. 65), и будет искомым центром.

Рассмотрим некоторые теоремы, имеющие важное значение для характеристики гомотетии:

Теорема 3. **Всякое взаимно-однозначное соответствие между точками двух фигур, обладающее следующими свойствами: а) точкам любого отрезка соответствуют точки некоторого отрезка, б) любые два соответственных вектора коллинеарны, в) отношения длин соответственных векторов постоянны, — представляет собой гомотетию или параллельный перенос.**

Доказательство. Пусть между точками двух фигур установлено соответствие, обладающее тремя перечисленными свойствами.

Обозначим через $[AB]$ и $[A'B']$ какие-либо два соответственных отрезка, через D и D' — какие-либо две соответственные точки. Если каждые два соответственных отрезка конгруэнтны и $[AB) \uparrow\uparrow [A'B')$, то данные фигуры получаются одна из другой с помощью переноса, так как при этом и отрезки AA' и BB' конгруэнтны, параллельны и $[AB) \uparrow\uparrow [A'B')$.

Если этот случай исключить из рассмотрения, то прямые AA' и BB' пересекаются в некоторой точке S (см. рис. 61). Примем точку S за центр некоторой гомотетии, а точки A и A' — за пару соответственных точек. Построим точку D'', соответствующую в этой

---

* Доказательства свойств 4), 5), 6) являются непосредственными следствиями определения гомотетии и того факта, что при $k = -1$ гомотетия является центральной симметрией.

гомотетии какой-либо точке D первой фигуры. При этом отрезки AD и $A'D''$ будут параллельны, причем $|\overrightarrow{A'D''}| : |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{SA'}| : |\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{A'B'}| : |\overrightarrow{AB}|$. Лучи AD и $A'D''$ будут сонаправлены или противоположно направлены, в зависимости от направлений лучей AB и $A'B'$. Отсюда следует, что точка D'' совпадает с точкой D'. Иначе говоря, любая точка D' второй фигуры получается из соответствующей точки D первой фигуры с помощью указанной выше гомотетии.

Теорема 4. **Композиция двух гомотетий есть гомотетия (или перенос), причем центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой.**

Доказательство. Пусть при гомотетии (рис. 66) $H_P^{k_1}$ фигура Φ_1 отображается на Φ_2, а при гомотетии $H_Q^{k_2}$ фигура Φ_2 отображается на фигуру Φ_3. В силу теоремы 3, фигуры Φ_1 и Φ_3 или гомотетичны, или конгруэнтны. При гомотетии $H_P^{k_1}$ любой вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ отображается на вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$, причем $\overrightarrow{A_2B_2} = k_1 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. При гомотетии $H_Q^{k_2}$ вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ отображается на вектор $\overrightarrow{A_3B_3}$, причем $\overrightarrow{A_3B_3} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_2B_2}$. Отсюда $\overrightarrow{A_3B_3} = k_1 \cdot k_2\overrightarrow{A_1B_1}$.

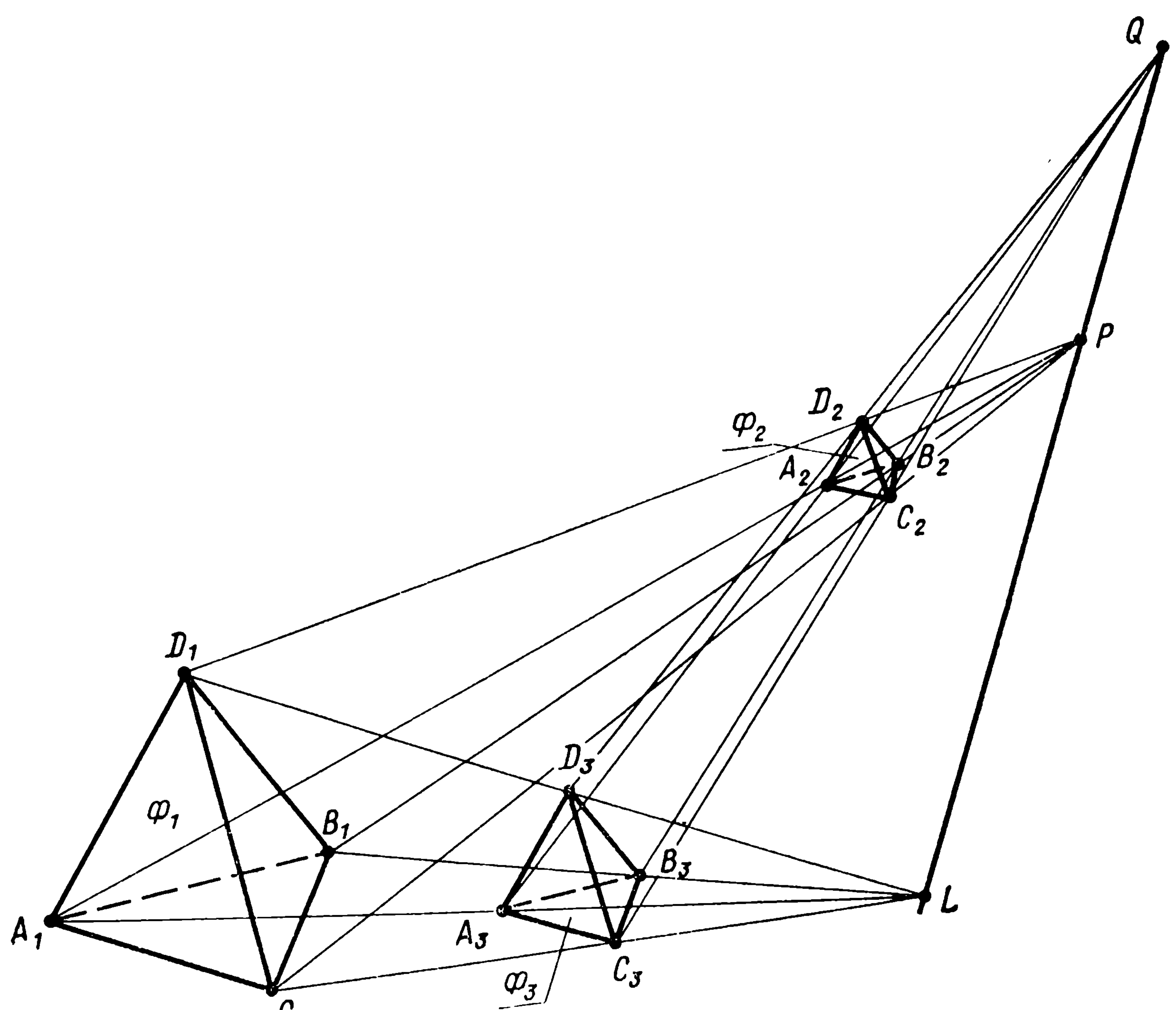


Рис. 66

Это равенство имеет место для любых соответственных векторов. Таким образом, коэффициент гомотетии фигур Φ_1 и Φ_3 равен $k_1 \cdot k_2 = k$.

Всякая прямая, проходящая через центр гомотетии, отображается на себя, тогда прямая PQ отображается сама на себя при композиции гомотетий, которая дает гомотетию с центром L; следовательно, прямая PQ проходит через L. Прямая, на которой лежат три центра гомотетии попарно гомотетичных фигур, называется осью *гомотетии* этих фигур.

Если $k = k_1 \cdot k_2 \neq 1$, то центры гомотетии $H_P^{k_1}$, $H_Q^{k_2}$ и H_L^k лежат на одной прямой.

Если $k = k_1 \cdot k_2 = 1$, то гомотетия H_L^k является тождественным преобразованием. В этом случае для любых соответственных пар векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_3C_3}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_3C_3}$ и т. д. выполняются равенства

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_3B_3};\ \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_3C_3};\ \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_3C_3}.$$

Из первого равенства следует, что фигура $A_1B_1B_3A_3$ является параллелограммом, отсюда получаем:

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3}.$$

Точно так же доказываем, что

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{C_1C_3}.$$

Отсюда $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{C_1C_3} = \ldots$, т. е. точки A_1, B_1, C_1 ... отображаются на точки A_3, B_3, C_3 ... параллельным переносом.

Следствие 1. Если каждая из фигур Φ_2 и Φ_3 является образом фигуры Φ_1 при гомотетии или переносе, то фигуры Φ_2 и Φ_3 отображаются одна на другую с помощью гомотетии или переноса.

Следствие 2. Две фигуры, собственно-гомотетичные третьей, а также две фигуры, несобственно-гомотетичные третьей, собственно-гомотетичны (или отображаются одна на другую с помощью переноса); если одна из двух фигур собственно-гомотетична третьей, а другая ей несобственно-гомотетична, то эти две фигуры несобственно-гомотетичны.

Для построения центра гомотетии H_L^k (в случае $k = k_1 \cdot k_2 \neq \neq 1$) надо знать положение центров P и Q и три соответственных точки A_1, A_2, A_3.

Для того, чтобы найти центр H_L^k, зная положение центров $H_P^{k_1}$ и $H_Q^{k_2}$ и значения коэффициентов k_1 и k_2, поступаем следующим образом:

Пусть L центр результирующей гомотетии H_L^k (рис. 67). Точка L является неподвижной точкой гомотетии H_L^k, при гомотетии $H_Q^{k_2}$ она отображается на точку S, а при гомотетии $H_P^{k_1}$ точка S возвращается опять в положение L, при этом получим: $\overrightarrow{PS} = k_1 \cdot \overrightarrow{PL}$;

$$\overrightarrow{QL} = k_2 \cdot \overrightarrow{QS} \text{ или } k_2 \cdot \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QL}.$$

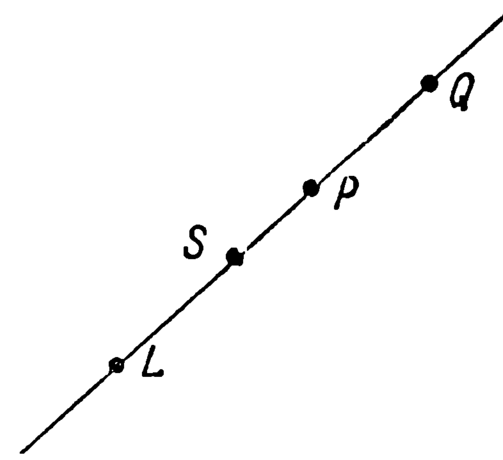


Рис. 67

Кроме того, можем записать очевидные равенства:

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{QL};$$

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL}.$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{PS} = k_1 (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL}) = (\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{QL})$$

или

$$\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{QL} = k_1 (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL}).$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{QL} = \frac{k_1 \cdot k_2 - k_2}{1 - k_1 \cdot k_2} \cdot \overrightarrow{PQ}; \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PQ} + \frac{k_1 \cdot k_2 - k_2}{1 - k_1 k_2} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

или

$$\overrightarrow{PL} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \cdot \overrightarrow{PQ}. \qquad (**)$$

С помощью одной из формул — (*) и (**) — можно установить, где находится центр L.

Возьмем для примера равенство (**). Если $0 < \frac{1-k_2}{1-k_1k_2} < 1$, то центр P лежит между точками L и Q. Если $\frac{1-k_2}{1-k_1k_2} < 0$, то центр L лежит между точками P и Q. Наконец, если $\frac{1-k_2}{1-k_1k_2} > 1$, то центр Q лежит между точками P и L.

Теорема 5. **Любые две сферы гомотетичны между собой.**

Доказательство. Пусть даны две сферы с центрами O_1 и O_2, радиусы которых соответственно равны R_1 и R_2 (рис. 68).

Рассмотрим случай, когда сферы не имеют ни одной общей точки (рис. 68, *а*, *б*) и точки O_1 и O_2 являются соответственными в искомой гомотетии.

Коллинеарные векторы $\overrightarrow{O_2A_2}$ и $\overrightarrow{O_1A_1}$ и точки A_1 и A_2 также будем считать соответственными при этой гомотетии, так как $[O_2A_2] \parallel [O_1A_1]$.

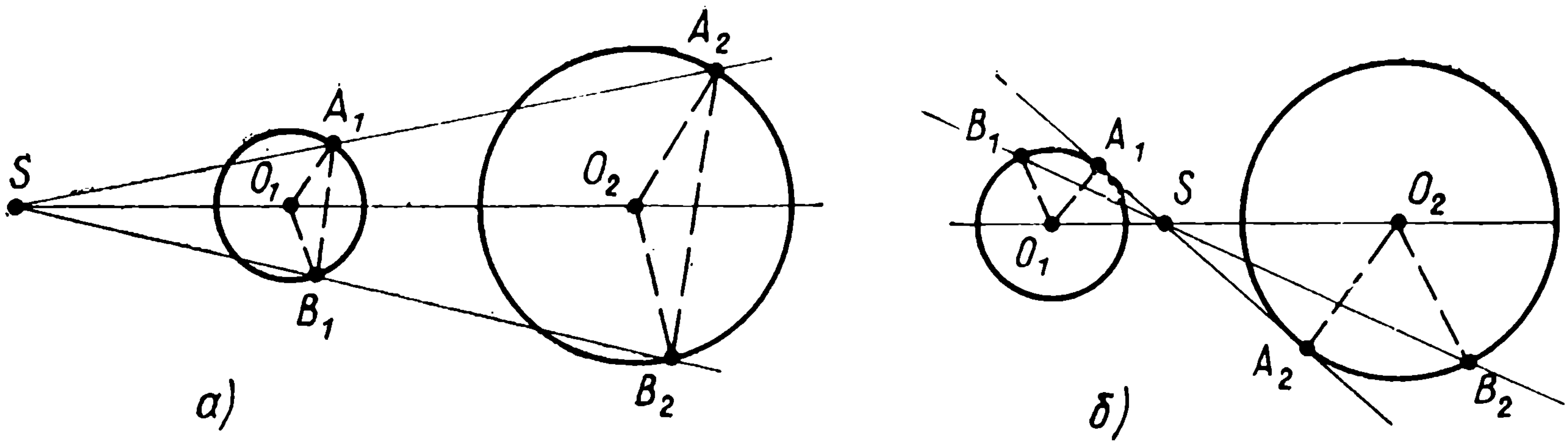


Рис. 68

Аналогично рассмотрим точки B_1 и B_2 и т. д., такие, что $[O_2B_2] \parallel [O_1B_1]$, ... и, следовательно,

$$\overrightarrow{SO_2} = k \cdot \overrightarrow{SO_1};$$
$$\overrightarrow{O_2A_2} = k \cdot \overrightarrow{O_1A_1};$$
$$\overrightarrow{O_2B_2} = k \cdot \overrightarrow{O_1B_1}.$$

Углы $B_2O_2A_2$ и $B_1O_1A_1$ конгруэнтны, как углы с соответственно параллельными сторонами. А так как треугольники $B_2O_2A_2$ и $B_1O_1A_1$ равнобедренные, то $\widehat{A_2B_2O_2} = \widehat{A_1B_1O_1} = \widehat{B_2A_2O_2} = \widehat{B_1A_1O_1}$.

Таким образом: $[A_2B_2] \parallel [A_1B_1]$, $\overrightarrow{A_2B_2} = k\overrightarrow{A_1B_1}$.

По теореме 3, сферы O_2 и O_1 гомотетичны.

Для формирования понятия гомотетии полезно рассмотреть следующие упражнения:

70. Имеются три сферы с центрами O_1, O_2 и O_3. Докажите, что у каждой пары сфер имеется два центра гомотетии — внутренний и внешний, а у трех сфер будет всего шесть центров гомотетии, которые лежат по три на четырех прямых.

71. Постройте внутренний и внешний центр гомотетии для двух сфер, если эти сферы касаются друг друга.

72. Постройте центр гомотетии двух сфер в случае их пересечения.

73. Постройте центр гомотетии для двух сфер, расположенных одна внутри другой.

74. Докажите, что центры тяжести граней данного тетраэдра служат вершинами тетраэдра, гомотетичного данному (рис. 69).

75. Через каждую вершину тётраэдра проведена плоскость, параллельная противоположной грани. Докажите, что четыре полученных таким образом плоскости образуют тетраэдр, гомотетичный данному. Найдите центр гомотетии и коэффициент гомотетии.

С помощью гомотетии можно решать различные задачи на построение:

76. В данный конус впишите равносторонний цилиндр (рис. 70).

П о с т р о е н и е. Рассмотрим осевое сечение конуса. Проведем $[D_1C_1] \parallel [MN]$ так, чтобы точки D_1 и C_1 лежали на образующих конуса. Построим квадрат $D_1A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины A_1 и B_1

лежали внутри конуса. Точки A и B пересечения прямых SA_1 и SB_1 с диаметром основания будут вершинами квадрата $ABCD$. Это есть осевое сечение цилиндра.

Доказательство. Так как $A_1B_1C_1D_1$ — равносторонний цилиндр, то и гомотетичный ему цилиндр $ABCD$ также равносторонний.

77. В данную правильную четырехугольную пирамиду впишите куб так, чтобы четыре его вершины лежали на ребрах, а четыре — на основании пирамиды.

Решение. Проведем любое сечение $A_1B_1C_1D_1$ пирамиды, параллельное основанию пирамиды (рис. 71). На этом сечении (квадрате) строим куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Взяв в качестве центра гомотетии вершину S пирамиды, проведем прямые SA_2, SB_2, SC_2, SD_2.

Точки A', B', C', D' их пересечения с основанием пирамиды (точнее, с диагоналями основания) будут вершинами одного из оснований искомого куба. Вершины A, B, C, D другого основания получим, если проведем прямые $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$, параллельные соответственно отрезкам A_2A_1, B_2B_1, D_2D_1 до пересечения с ребрами куба.

78. В данную правильную четырехугольную пирамиду впишите куб так, чтобы четыре его вершины лежали на апофемах боковых граней, а четыре других вершины — в плоскости основания пирамиды.

79. Постройте куб по данной диагонали.

Решение. Строим произвольный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагонали AC_1 (или ее продолжении, как сделано на рисунке 72), откладываем отрезок AC_1', конгруэнтный данному (рис. 72). Затем проводим $(C_1'C') \parallel (C_1C)$ до пересечения с прямой AC. Дальнейшие построения выполняются очень легко. Здесь использованы также свойства гомотетии с центром в точке A.

80. Постройте куб по сумме (или разности) длин ребра куба и его диагонали.

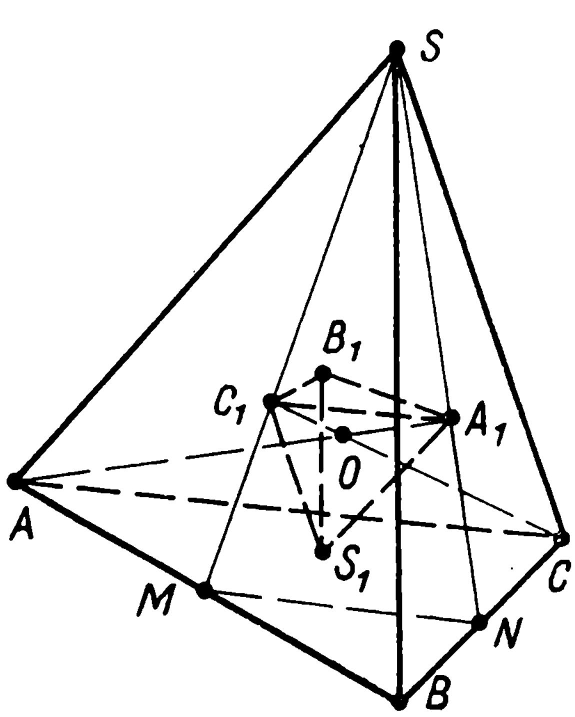


Рис. 69

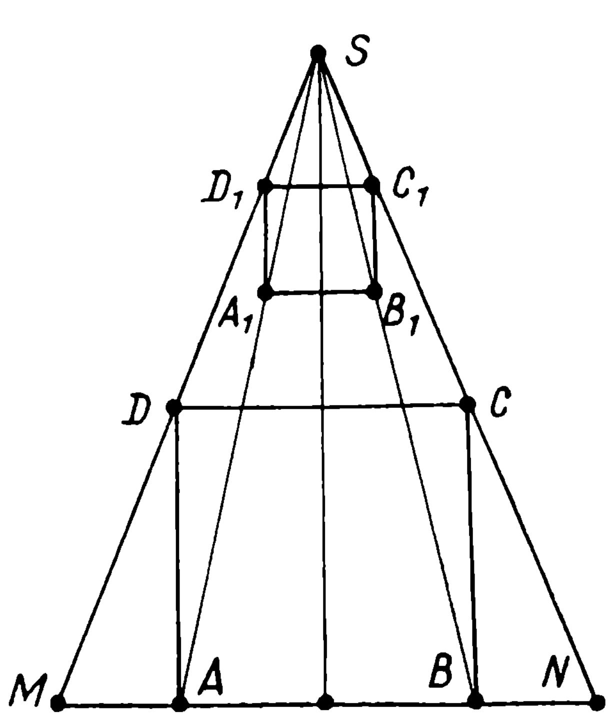


Рис. 70

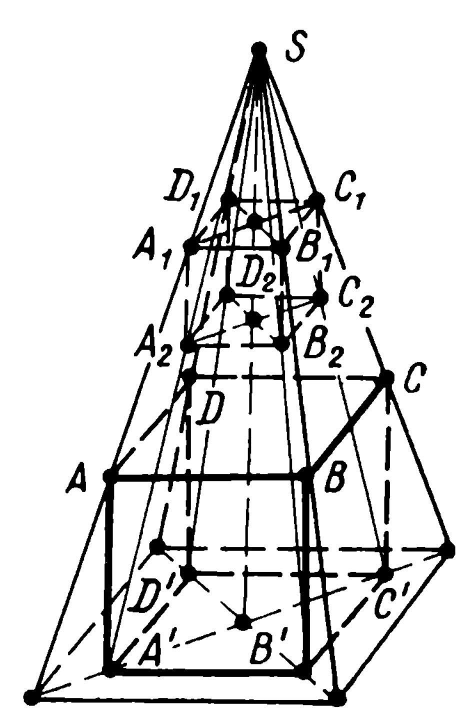


Рис. 71

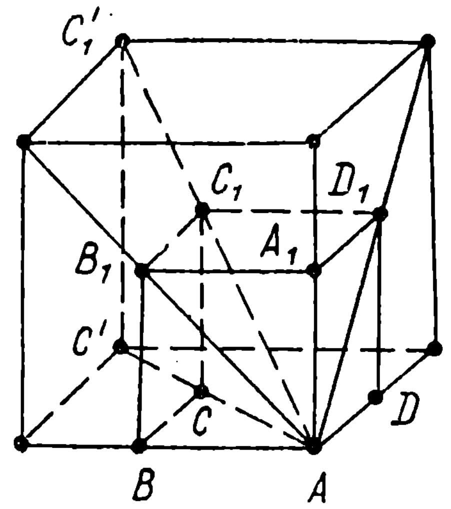


Рис. 72

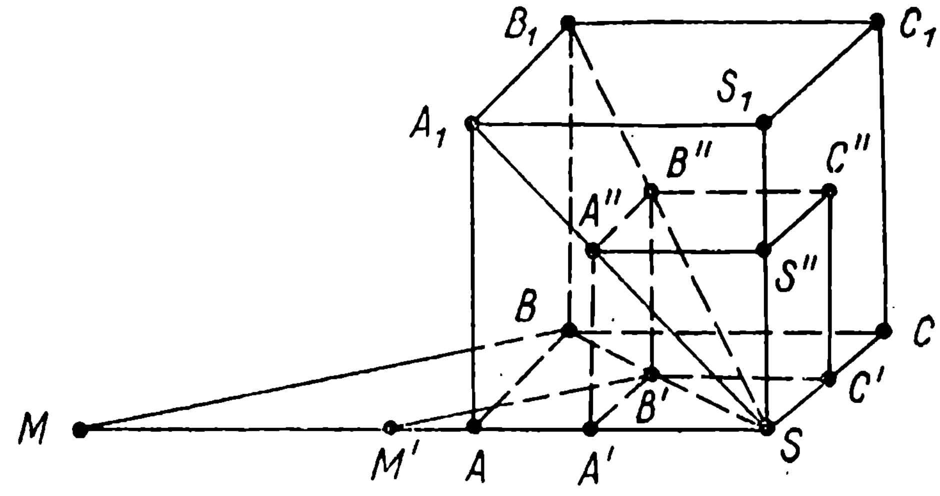


Рис. 73

Решение. Анализ. Допустим, что $SABCS_1A_1B_1C_1$ — искомый куб (рис. 73). Построим на прямой SA отрезок SM, длина которого равна сумме длин ребра SA и диагонали SB_1. При гомотетии с центром S куб $SABCS_1A_1B_1C_1$ отобразится на куб $SA'B'C'S''A''B''C''$, точки B, A, M отобразятся на точки B', A', M', причем $(B'M') \parallel (BM)$, $(B'A') \parallel (BA)$ и длина отрезка SM' равна сумме длин ребра SA' и диагонали SB'' куба $SA'B'C'S''A''B''C''$.

Построение. Сначала строим произвольный куб $SA'B'C'S''A''B''C''$. Затем откладываем на прямой SA' отрезок SM' $(|SM'| = |SA'| + |SB''|)$ и отрезок SM $(|SM| = |SA| + |SB_1|)$. Через точку M проводим до пересечения с прямой SB' $[MB] \parallel [M'B']$. Из точки B до пересечения с прямой SA' проводим $[BA] \parallel [B'A']$. Остальные точки искомого куба уже получить нетрудно.

Доказательство. Из построения ясно, что

$$\frac{|SM|}{|SM'|} = \frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB_1|}{|SB''|},$$

отсюда

$$\frac{|SA| + |SB_1|}{|SA'| + |SB''|} = \frac{|SM|}{|SM'|}.$$

А так как $|SA'| + |SB''| = |SM'|$, то $|SA| + |SB_1| = |SM|$.

Исследование. Через точку M можно провести единственную прямую BM $((BM) \parallel (B'M'))$, а через точку B — единственную прямую BA $((BA) \parallel (B'A'))$. Если бы мы взяли в качестве исходного куба какой-то другой, то прямая $B_1'M_1'$ была бы параллельной прямой $B'M'$ и через точку M мы провели бы прямую BM $((BM) \parallel (B_1'M_1'))$, а следовательно, $(BM) \parallel (B'M')$. Точно так же вполне единственное положение занимает прямая BA, а следовательно, и точка A.

Таким образом, задача имеет единственное решение.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели важный вид отображения плоскости на себя, при котором каждая фигура отображается на гомотетичную ей фигуру. При этом отношения расстояний между соответствующими точками гомотетичных фигур сохраняются, а их ориентация зависит от знака коэффициента гомотетии.

Понятие гомотетичных фигур является частным случаем более общего понятия — подобные фигуры.

В школьном курсе геометрии дается такое определение подобных фигур:

Если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что для любых точек X и Y первой фигуры отношение расстояний $|X_1Y_1|$ и $|XY|$ равно одному и тому же числу $k > 0$ (X_1 и Y_1 образы точек X и Y в этом отображении), то фигура $Ф_1$ называется подобной фигуре Ф с коэффициентом подобия k.

Отображение пространства на себя, при котором все расстояния изменяются в одном и том же отношении $k > 0$, называется преобразованием подобия.

Таким образом можно сделать вывод из сказанного выше, что гомотетичные фигуры являются подобными, а гомотетия является частным случаем преобразования подобия. Кроме этого, преобразование подобия любую фигуру отображает на подобную ей фигуру.

Рассмотрим некоторые свойства подобных фигур и преобразований подобия:

1. Подобие фигур обладает свойствами:

а) рефлексивности: $Ф \backsim Ф$;

б) симметричности: если $Ф_1 \backsim Ф_2$, то $Ф_2 \backsim Ф_1$, при этом если коэффициент подобия при преобразовании фигуры $Ф_1$ в $Ф_2$ равен k, то коэффициент подобия при преобразовании фигуры $Ф_2$ в $Ф_1$ равен $\frac{1}{k}$. Эти два преобразования называются взаимно-обратными;

в) транзитивности: если $Ф_1 \backsim Ф_2$, $Ф_2 \backsim Ф_3$, то $Ф_1 \backsim Ф_3$; при этом если коэффициент подобия при преобразовании фигуры $Ф_1$ в $Ф_2$ равен k_1, а при преобразовании фигуры $Ф_2$ в $Ф_3$ равен k_2, то коэффициент подобия при преобразовании фигуры $Ф_1$ в фигуру $Ф_3$ равен $k_1 \cdot k_2'$ (доказательство этих свойств предоставляется читателю).

2. Точкам фигуры Ф, лежащим на одной прямой, соответствуют в подобной ей фигуре Ф′ точки, также лежащие на одной прямой, точкам некоторого отрезка — также точки некоторого отрезка.

Доказательство. Пусть точка B лежит между точками A и C и точкам A, B, C соответствуют точки A', B', C'.

По определению подобия фигур

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}, \text{ тогда } \frac{|A'B'| + |B'C'|}{|AB| + |BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}.$$

Так как $|AB| + |BC| = |AC|$, то $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$.

Но это возможно только при условии, что точка B' лежит между точками A' и C'.

Из доказанного свойства вытекает, что фигура, подобная лучу, углу, треугольнику и т. д., есть также луч, угол, треугольник и т. д.

3. Соответственные плоские углы двух подобных фигур конгруэнтны. Это следует из того факта, что при преобразовании подобия сохраняются величины углов.

4. Если в фигуре Ф точки C и D лежат в одной плоскости с точками A и B и по разные стороны (по одну сторону) от прямой AB и точкам A, B, C и D соответствуют в фигуре Ф′ точки A', B', C' и D', то точки C' и D' лежат в одной плоскости с точками A' и B' и по разные стороны (соответственно — по одну сторону) от прямой $A'B'$. Если какие-либо четыре точки фигуры Ф не лежат в одной плоскости, то и соответствующие им точки фигуры Ф′ также не лежат в одной плоскости (докажите самостоятельно).

а) Из этого свойства следует, что при преобразовании подобия плоскость отображается на плоскость, полуплоскость — на полуплоскость, пространство — на пространство, полупространство — на полупространство.

б) Соответственные трехгранные углы подобных фигур, а следовательно, и соответственные двухгранные углы конгруэнтны.

Рассмотрим некоторые теоремы, раскрывающие сущность преобразования подобия:

Т е о р е м а 1. **Если есть две подобные фигуры, то существует третья фигура, гомотетичная первой и конгруэнтная второй.**

Доказательство аналогично с доказательством, известным из курса планиметрии (см. с. 122 учебного пособия по геометрии для VII класса).

Роль подобных треугольников играют в пространстве подобные тетраэдры.

Из предыдущего материала следует, что произвольный тетраэдр $ABCD$ отображается на любой подобный ему тетраэдр $A'B'C'D'$ единственным подобием, которое будет собственным или зеркальным в зависимости от того, совпадают или не совпадают ориентации $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

Другими словами, преобразование подобия полностью определяется образами четырех произвольно заданных некомпланарных точек.

Т е о р е м а 2. **Всякое преобразование подобия есть композиция гомотетии с положительным коэффициентом и перемещения. Обратно: всякая композиция гомотетии с коэффициентом больше или меньше нуля и перемещения есть преобразование подобия.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произвольную точку S примем за центр гомотетии и построим фигуру $Ф_1$, собственно-гомотетичную фигуре Ф относительно точки S, выбрав коэффициент k равным коэффициенту подобия фигуры Ф′ относительно Ф.

Если A и B — какие-либо две точки фигуры Ф, а A_1 и B_1 и A' и B' — соответствующие им точки фигур $Ф_1$ и Ф′, то мы имеем $k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$, отсюда $|A_1B_1| = |A'B'|$.

Так как это равенство имеет место для любых двух соответственных отрезков, то фигуры Ф и Ф′ конгруэнтны. Обратное предложение очевидно.

Итак, любое преобразование подобия можно представить как композицию гомотетии с положительным коэффициентом и перемещения. Но перемещение может быть и собственным и несобственным. В зависимости от этого преобразование подобия называется собственным или несобственным. Ориентация двух собственно-подобных фигур одинакова, а двух несобственно-подобных фигур — противоположна.

ЦЕНТРАЛЬНО-ПОДОБНОЕ ВРАЩЕНИЕ

В пространстве, так же как и на плоскости, любая фигура отображается на подобную ей фигуру преобразованием подобия, частными случаями которого являются перемещение и гомотетия. Мы можем теперь рассмотреть центрально-подобное вращение, понимая под этим композицию вращения вокруг прямой l (оси преобразования) и гомотетии с центром в точке O оси l (центре преобразования). Плоскость, проходящая через точку O перпендикулярно к прямой l, является неподвижной плоскостью центрально-подобного вращения. В том частном случае, когда вращение представляет собой осевую симметрию, существует бесконечно много других неподвижных плоскостей, а именно все плоскости, проходящие через прямую l; пусть центрально-подобное вращение представляет собой композицию вращения на угол α и гомотетии H_O^k, где точка O принадлежит оси вращения. Придавая α и k следующие значения, мы получим известные частные случаи центрально-подобного вращения:

α	k	Подобие
0	1	Тождественное преобразование
π	1	Симметрия относительно прямой
α	1	Вращение
π	—1	Симметрия относительно плоскости
0	—1	Симметрия относительно точки
α	—1	Поворотное отражение
0	k	Гомотетия (центральная)

Мы замечаем, что эта таблица включает все виды преобразований, как собственных, так и зеркальных, за исключением винтового перемещения и скользящей симметрии (не имеющей неподвижных точек). Но еще более неожиданным оказывается то, что за этими двумя исключениями любое преобразование подобия является центрально-подобным вращением.

Важным шагом в доказательстве того, что любое преобразование подобия, не являющееся перемещением, представляет собой центрально-подобное вращение, является следующая теорема:

Теорема 3. **Любое преобразование подобия, не являющееся перемещением, имеет в точности одну неподвижную точку.**

Доказательство. Пусть фигура Φ' подобна Φ. Построим фигуру Φ_0, гомотетичную фигуре Φ с коэффициентом $k > 0$ относительно произвольной точки P и в то же время конгруэнтную Φ'. При этом если фигура Φ' собственно-подобна Φ, то выберем фигуру Φ_0, гомотетичную фигуре Φ с коэффициентом $k > 0$, а если фигура Φ' зеркально-подобна Φ, то выберем фигуру Φ_0, гомотетичную фигуре Φ с коэффициентом $k < 0$. В таком случае фигура Φ' всегда будет собственно-конгруэнтна фигуре Φ_0 и потому будет получаться из Φ_0 с помощью некоторого перемещения первого рода.

Если это перемещение будет параллельным переносом, то Φ и Φ' гомотетичные и, следовательно, данное подобие есть гомотетия, которая имеет неподвижную точку — центр гомотетии.

Рассмотрим теперь случай, когда фигура Φ' получается из Φ_0 с помощью винтового перемещения, или, в частности, поворота. Обозначим через l ось этого винтового перемещения или этого поворота. Проведем еще через точку P плоскости σ, перпендикулярную к оси l.

Обозначим проекции фигур Φ, Φ_0 и Φ' на плоскости σ соответственно через φ, φ_0, φ'.

Фигуры Φ и Φ_0 гомотетичны относительно точки P, лежащей в плоскости σ. Отсюда легко заключить, что и их проекции φ и φ_0 на плоскости σ будут гомотетичны относительно той же точки. Далее, фигура Φ' получается из Φ_0 с помощью винтового перемещения с осью l, перпендикулярной к плоскости σ (или в частном случае с помощью поворота около такой оси l). Это винтовое перемещение представляет собой (см. теорема 15, теорема Моцци) композицию поворота около оси l на перенос по направлению этой оси (в частном случае этот перенос может обратиться в тождество). Поэтому проекция φ' фигуры Φ' на плоскость σ получается из проекции φ_0 фигуры Φ_0 на ту же плоскость с помощью поворота около точки пересечения P_0 оси l с плоскостью σ.

Итак, в плоскости σ фигура φ_0 получается из φ с помощью гомотетии, а фигура φ' — из φ_0 с помощью поворота. Следовательно, фигура φ' в плоскости σ будет собственно-подобна φ. Обозначим через O неподвижную точку фигур φ и φ', лежащих в плоскости σ, и через p — прямую, проходящую через O и перпендикулярную к плоскости σ, т. е. параллельную прямой l.

Нетрудно убедиться, что прямой p, отнесенной к фигуре Φ, соответствует в фигуре Φ' та же самая прямая p, так что прямая p будет неподвижной прямой фигур Φ и Φ'.

Действительно, подобие, преобразующее фигуру Φ в Φ', представляется в виде композиции трех преобразований, а именно: гомотетии относительно точки P, некоторого поворота около прямой l и некоторого переноса вдоль прямой l. Композиция первых двух из этих преобразований переводит фигуру φ в фигуру φ' и, следовательно, точку O (по самому определению) — в себя и прямую p — также на себя. Перенос по направлению прямой l, параллельной p, очевидно, преобразует прямую p в себя.

Итак, доказано, что фигуры Φ и Φ' имеют неподвижную прямую p.

Докажем, что на этой прямой должна лежать и неподвижная точка фигур Φ и Φ'.

Пусть M и N — какие-либо две точки прямой p, которые мы будем рассматривать как точки фигуры Φ; M' и N' — соответствующие им точки фигуры Φ'. При этом $|MN| \neq |M'N'|$, так как фигуры Φ и Φ' не конгруэнтны. Построим на прямой p точку L, удовлетворяющую условию $|\overrightarrow{ML}| : |\overrightarrow{M'L}| = |\overrightarrow{MN}| : |\overrightarrow{M'N'}|$. Отсюда следует, что $|\overrightarrow{ML}| : |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{M'L}| : |\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{LN}| : |\overrightarrow{LN'}|$, или $|\overrightarrow{ML}| : |\overrightarrow{LN}| = |\overrightarrow{M'L}| : |\overrightarrow{LN'}|$. Последнее равенство показывает, что точке L фигуры Φ, делящей отрезок MN в отношении $|\overrightarrow{ML}| : |\overrightarrow{LN}|$, соответствует в фигуре Φ' та же самая точка L, делящая отрезок $M'N'$ в том же самом отношении. Итак, существует неподвижная точка L фигур Φ и Φ'.

Если бы эти фигуры имели еще и вторую неподвижную точку Q, то коэффициент подобия фигур Φ' относительно Φ был бы равен $|\overrightarrow{LQ}| : |\overrightarrow{LQ}| = 1$, что противоречит условию, по которому фигуры Φ и Φ' не конгруэнтны. Следовательно, неподвижная точка L — единственная.

Теперь мы подготовлены к доказательству основной теоремы.

Теорема 4. **Любое преобразование подобия представляет собой либо винтовое перемещение, либо скользящую симметрию, либо центрально-подобное вращение.**

Доказательство. Если $|k| = 1$, то подобие является перемещением и оно является либо винтовым движением, либо скользящей симметрией, либо поворотным отражением (тождественное преобразование, перенос, поворот, отражение от плоскости, как известно, есть частные случаи этих трех перемещений). Поэтому рассмотрим случай, когда подобие не является перемещением, т. е. $|k| \neq 1$.

Пусть P — неподвижная точка подобных фигур Φ и Φ', существование которой установлено предыдущей теоремой. Как и при доказательстве указанной теоремы, построим фигуру Φ_0, гомотетичную фигуре Φ с коэффициентом $k > 0$ или гомотетичную фигуре Φ с коэффициентом $k < 0$ и в то же время собственно-конгруэнтную фигуре Φ', принимая на этот раз за центр гомотетии не произвольную точку пространства, а неподвижную точку P фигур Φ и Φ'. Точка P будет, очевидно, и неподвижной точкой фигур Φ_0 и Φ'.

Так как фигуры Φ_0 и Φ' собственно-конгруэнтны и имеют неподвижную точку P, то фигура Φ' получается из Φ_0 поворотом около некоторой оси p, проходящей через точку P.

Для формирования понятия подобия полезно выполнить следующее упражнение:

Найдите ось и угол поворота для подобия, отображающего точку с координатами (x, y, z) на точку с координатами (kz, kx, ky).

ГРУППА ПОДОБИЯ

Если при преобразовании f фигура Φ отображается на собственно-подобную ей фигуру Φ', а фигура Φ' преобразованием f_2 отображается на собственно-подобную ей фигуру Φ'', то фигуры Φ и Φ'' являются собственно-подобными. Поэтому результирующее преобразование — композиция двух преобразований f_1 и f_2 — является собственным подобием.

Композиция двух несобственных подобий есть собственное подобие. Композиция собственного и несобственного подобия есть несобственное подобие.

Преобразование, обратное преобразованию подобия, также является преобразованием подобия.

Отсюда видно, что множество преобразований подобия является группой, которая называется группой подобия. Множество собственных подобий входит в эту группу в качестве подгруппы. Точно так же группа перемещений входит в качестве подгруппы в группу подобия.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ

4. Фигуры Ф и Ф′ конгруэнтны: а) одинаково ориентированы, б) противоположно ориентированы, в) одинаково ориентированы, г) одинаково ориентированы, если n — четное; противоположно ориентированы, если n — нечетное.

8. Если A и B расположены по разные стороны от σ, то найдите $A' = S_\sigma\ (A)$. Искомая точка N есть точка пересечения прямой $A'B$ с плоскостью σ.

10. Постройте $S_\sigma\ (A) = A_1$, $S_{\sigma_1}\ (A) = A_2$. Искомые точки есть точки пересечения прямой A_1A_2 с плоскостями σ и σ_1.

12. а) Биссектральная плоскость двугранного угла, образуемого окрашенными плоскостями; б) плоскость, параллельная окрашенным граням и проходящая через средние линии остальных граней.

13. а) Три грани имеют общую вершину; искомая плоскость проходит через общее ребро двух граней и через диагональ третьей грани; б) две грани параллельны, а третья их пересекает; искомая плоскость параллельна первым двум плоскостям и проходит через среднюю линию третьей грани.

14. Если окрашена одна грань, то задача решается просто. Если окрашены две грани, то рассмотрите случаи: а) две грани имеют общее ребро, б) две грани имеют общую вершину (но не общее ребро), в) две грани не имеют ни общего ребра, ни общей вершины. Если окрашены три грани, то рассмотрите случай:

а) три грани имеют общую вершину, б) две грани имеют общую вершину с одной из этих граней (но не имеют общего ребра с этой гранью).

15. Искомая плоскость перпендикулярна плоскости окружности и проходит через диагональ квадрата, проходящую через общую вершину треугольника и квадрата.

16. а) Плоскость, проходящая через центр третьего шара и через точку касания двух шаров, перпендикулярна к линии их центров. Таких плоскостей будет три. б) Плоскость, проходящая через центры трех шаров. Всего четыре плоскости симметрии.

18. Четыре прямые, перпендикулярные к плоскости треугольника, образуемого данными прямыми, и проходящие одна через центр вписанной окружности, а три другие через центр вневписанных окружностей.

21. Две биссекторные плоскости, перпендикулярные между собой.

32. Сначала докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны и одинаково ориентированы, затем покажите, что тетраэдры $DABC$ и $D'A'B'C'$ конгруэнтны и одинаково ориентированы, где D и D' — любые соответственные точки.

33. Докажите, что $[MP]$, $[PN]$ и $[NM]$ являются средними линиями сторон треугольника.

34. Достаточно осуществить параллельный перенос $\overrightarrow{AA_1}$.

35. Выполните параллельный перенос конуса (начало вектора совпадает с центром основания конуса, а конец — с точкой касания шара и плоскости основания конуса).

38. Пусть l_1 и l_2 — оси симметрии. Представим осевую симметрию с осью l_1 в виде композиции двух отражений от плоскостей σ_1 и σ_2, а другую осевую симметрию в виде композиции двух отражений от плоскостей σ_2 и σ_3, проходящих через оси l_1 и l_2. Тогда получим:

$$S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_3} = S_{\sigma_1} \circ S_{\sigma_3}.$$

В первом случае получится параллельный перенос $\sigma_1 \parallel \sigma_3$, во втором случае — вращение, ось которого проходит через точку пересечения l_1 и l_2.

39. См. упр. 38.

42. Рассмотрите случаи: а) $\sigma_1 \parallel S$; б) $S \in \sigma_1$; в) $S \perp \sigma_1$; г) $S \parallel \sigma$.

43. а) Осевую симметрию с осью, проходящей через точку пересечения данных осей и перпендикулярной к этим осям;

б) параллельный перенос на расстояние, в два раза большее расстояния между данными осями.

44. Центральная симметрия имеет только одну неподвижную точку. Если же имеется два центра симметрии, то получается две неподвижные точки. Это противоречие и доказывает теорему.

45. Исходя из условия задачи, можем положить: $|AA_1| = |BB_1|$, $|A_1A_2| = |B_1B_2|$. Пусть X, Y, Z — середины $[AB]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$. Постройте образы точек A_1 и A_2 при центральной симметрии с центром X, получим точки A_1' и A_2'. Прямая (BA_2') параллельна прямой (AA_2). Далее докажите, что

$$(A_1'B) \parallel (XY),\ (A_2'B_2) \parallel (XZ),\ (A_1'B_1) \parallel (A_2'B_2),$$

и примените аксиому параллельности. Искомым множеством точек является прямая ZX.

55. Композицию двух одинаковых поворотных отражений можно заменить композицией двух вращений около оси, т. е. вращением. Вращение же, если оно не является осевой симметрией, не инволюционно.

56. а) Вращение с той же осью, б) вращение, ось которого параллельна осям данных поворотных отражений.

61. а) Осевая симметрия; б) вращение около оси.

62. Композиция двух осевых симметрий. В общем случае получается винтовое движение.

63. Композиция вращения и параллельного переноса с направлением, параллельным оси вращения, т. е. винтовое движение.

71—73. Постройте параллельные радиусы, проведите через их концы прямую. Точка пересечения этой прямой и линии центров является центром гомотетии.

74. $\overrightarrow{SA_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{SC_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SM}$. Отсюда: $[A_1C_1] \parallel [MN]$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM}$. Далее $[MN] \parallel [CA]$, $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Затем получим: или $\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, или $\overrightarrow{A_1C_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Отсюда можно найти центр O гомотетии векторов $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AC}$. Далее покажите аналогическими рассуждениями, что центр гомотетии других пар соответственных векторов совпадает с O и коэффициент гомотетии равен $-\frac{1}{3}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В основном тексте на с. 22 мы рассмотрели определение неподвижной точки перемещения. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

С помощью понятия неподвижной точки можно классифицировать перемещения по числу неподвижных точек.

Теорема 1. **Множество неподвижных точек любого перемещения может быть: а) пустым множеством; б) точкой; в) прямой; г) плоскостью.**

Доказательство. Допустим, что перемещение F имеет неподвижные точки. Возможны такие случаи: 1) только одна точка плоскости неподвижна; 2) существует по меньшей мере две неподвижные точки A и B и не существует неподвижных точек, не лежащих на прямой AB; 3) существуют три неподвижные точки F, не лежащие на одной прямой.

В случае 2) при перемещении F все точки прямой AB остаются на месте, а в случае 3) $F = E$.

При перемещении F прямая отображается сама на себя. Пусть C — произвольная точка (AB). На прямой AB существуют две точки — C и C_1, которые удалены от A на расстояние $|AC|$; они принадлежат различным открытым лучам с началом A. Поскольку точки A и B неподвижны, эти лучи при перемещении F отображаются на себя. Значит, $F(C) = C$.

3) Если точки A, B и C неподвижны и не лежат на одной прямой, то, как мы только что показали, все точки прямых AB, AC и BC — неподвижные точки F. Пусть M — произвольная точка плоскости, не принадлежащая этим прямым, K — точка отрезка AC. По теореме Паша прямая KM имеет общую точку D либо с (AB) либо с (BC). K и D — различные неподвижные точки F. Следовательно, все точки прямой KD, в том числе и M, неподвижны. M — произвольно выбранная точка плоскости. Поэтому $F = E$.

Теорема 2. **Пусть точки A, B, C не принадлежат одной прямой. F_1 и F_2 — различные перемещения. Если $F_1(A) = F_2(A)$; $F_1(B) = F_2(B)$; $F_1(C) = F_2(C)$, то $F_1 = F_2$.**

Доказательство. Рассмотрим перемещение $F_2^{-1} \circ F_1$. Из условия теоремы следует, что

$(F_2^{-1} \circ F_1)(A) = A$; $(F_2^{-1} \circ F_1)(B) = B$; $(F_2^{-1} \circ F_1)(C) = C$.

Поэтому вследствие теоремы 1 $F_2^{-1} \circ F_1 = E$.

«Домножим» слева обе части этого равенства на F_2. Так как перемещения плоскости образуют группу, получим:

$$F_2 \circ (F_2^{-1} \circ F_1) = F_2 \circ E;$$
$$(F_2 \circ F_2^{-1}) \circ F_1 = F_2;$$
$$E \circ F_1 = F_2;$$
$$F_1 = F_2.$$

Из этой теоремы следует, что перемещение вполне определяется указанием образов трех точек, не лежащих на одной прямой. Поэтому существует не более двух перемещений, отображающих A на A_1, B на B_1.

Определение. Прямая a называется неподвижной прямой перемещения F, если $F(a) = a$.

Из этого определения следует, что пересечение двух неподвижных прямых перемещения F есть неподвижная точка этого перемещения. В тождественном отображении не существует трех неподвижных точек, не принадлежащих одной прямой, поэтому в этом перемещении не существует трех неподвижных прямых, не проходящих через одну точку.

Из определения неподвижной прямой вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если перемещение F есть центральная симметрия относительно центра O, то все прямые, проходящие через центр O, и только они есть неподвижные прямые.

Следствие 2. Ось симметрии и все прямые, ей перпендикулярные, есть неподвижные прямые перемещения осевой симметрии.

Теорема 3. **Если в перемещении существуют неподвижные точки и неподвижные прямые, то на каждой неподвижной прямой существует по меньшей мере одна неподвижная точка и через каждую неподвижную точку проходит по меньшей мере одна неподвижная прямая.**

Доказательство. Пусть O_1 — неподвижная точка и a — неподвижная прямая перемещения F. Существует прямая b, проходящая через точку O_1 и перпендикулярная прямой a. Перемещение сохраняет величину угла, поэтому перпендикулярные прямые отображаются на перпендикулярные прямые: $F(b) = b$, т. е. b есть неподвижная прямая перемещения F. Точка O пересечения прямых a и b есть неподвижная точка.

Следовательно, на неподвижной прямой a существует неподвижная точка O, а через неподвижную точку O проходит неподвижная прямая b.

Из этой теоремы следует, что поворот R, отличный от центральной симметрии, имеет единственную неподвижную точку, но не имеет неподвижных прямых. Центральная симметрия имеет единственную неподвижную точку (центр) и пучок проходящих через нее неподвижных прямых. Осевая симметрия имеет бесчисленное множество неподвижных точек, принадлежащих оси, и бесчисленное множество неподвижных прямых, состоящее из оси симметрии и всех перпендикулярных ей прямых.

Перемещения относительно неподвижных элементов могут быть классифицированы следующим образом:

Число неподвижных точек	Неподвижные прямые	Род	Названия
Одна	Нет	Первый	Поворот вокруг точки
Одна	Пучок	Первый	Центральная симметрия
Нет	По крайней мере одна	Первый	Параллельный перенос
Прямая неподвижных точек	Прямая и все прямые, ей перпендикулярные	Второй	Осевая симметрия
Нет	По крайней мере одна	Второй	Скользящая симметрия

На с. 22 мы давали определение инволюционным преобразованиям, или инволюции. Рассмотрим некоторые свойства инволюций и их связь с понятием неподвижной точки.

Теорема. 4. **Если F — инволюция, то $F = F^{-1}$.**

Доказательство.

$$\begin{aligned} F \circ F &= E; \\ (F \circ F) \circ F^{-1} &= E \circ F^{-1}; \\ F \circ (F \circ F^{-1}) &= F^{-1}; \\ F \circ E &= F^{-1}; \\ F &= F^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 5. **Всякое инволютивное перемещение F имеет хотя бы одну неподвижную точку.**

Доказательство. Если $F = E$, то, очевидно, F является инволюцией.

Пусть $F \neq E$. Тогда существует точка A, образ которой (точка B) отличен от A. Так как F — инволюция, $F(B) = F(F(A)) = A$. Значит, образ отрезка AB при перемещении F — отрезок AB. Теперь понятно, что середина отрезка AB — неподвижная точка перемещения F (F — сохраняет расстояния).

Часто рассматривая перемещения плоскости, указывается пять основных видов: поворот, центральная и осевая симметрии, параллельный перенос и скользящая симметрия. А скользящая симметрия в школьном курсе геометрии не рассматривается. Здесь мы даем определение и рассмотрим некоторые важные свойства. Вместе с тем в самом определении скользящей симметрии уже участвует понятие композиции перемещений.

Определение. Если вектор $\vec{a}$ параллелен прямой l, то перемещение

$$F = \vec{a} \circ S_l$$

называется **скользящей симметрией.**

Считая нулевой вектор параллельным любой прямой, будем считать обыкновенную осевую симметрию частным случаем скользящей симметрии.

Теорема 6. **Композиция осевой симметрии S_a и вектора $\overrightarrow{AB}$ коммутативна, если $a \parallel \overrightarrow{AB}$ или $\{A, B\} \subset a$. $S_a \circ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \circ S_a$, где A и B — точки прямой a.**

Теорема 7. **Композиция вектора и скользящей симметрии — скользящая симметрия.**

Доказательства этих теорем предоставляем читателю.

Так как скользящая симметрия — перемещение, то она обладает всеми его свойствами. Приведем свойства скользящей симметрии, присущие только ей:

а) перемещение, обратное скользящей симметрии, — скользящая симметрия с той же осью, но с противоположным вектором. Композиция скользящей симметрии и обратной ей, как и для любых перемещений, дает тождественное отображение плоскости на себя, т. е. $p \circ p^{-1} = E$;

б) ось скользящей симметрии делит пополам отрезок, соединяющий соответственные точки (если соответственные точки не лежат на оси). Это свойство дает простой способ построения оси скользящей симметрии;

в) скользящая симметрия неподвижных точек не имеет; ось скользящей симметрии — единственная неподвижная прямая;

г) композиция осевой симметрии и поворота, центр которого не принадлежит оси симметрии, есть скользящая симметрия;

д) композиция трех осевых симметрий есть скользящая симметрия, если оси симметрий не проходят через одну точку и не параллельны.

Мы показали, что некоторые перемещения можно представить в виде композиции того или иного числа осевых симметрий. Отсюда возникает такой вопрос: «Любое ли перемещение можно представить в виде композиции некоторого числа осевых симметрий?» На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 8. **Любое перемещение можно представить в виде композиции не более чем трех осевых симметрий.**

Можно также доказать, что композиция любых трех осевых симметрий всегда является либо осевой симметрией, либо скользящей симметрией.

Выше было сказано, что осевую симметрию можно рассматривать как скользящую симметрию с тождественным переносом. В этом случае предыдущую теорему можно сформулировать так: композиция любых трех осевых симметрий всегда является некоторой скользящей симметрией.

Таким образом, установлено, что всякое перемещение можно представить в виде композиции не более чем трех осевых симметрий. Если перемещение есть композиция трех осевых симметрий, то она является либо переносом, либо поворотом.

Таким образом, можно сформулировать теорему:

Теорема Шаля. **Любое перемещение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо скользящей симметрией.**

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Можно дать определение преобразования подобия в следующем виде.

Отображение φ плоскости на себя называется преобразованием подобия, если оно изменяет расстояния в одном и том же отношении, т. е. для любых точек A и B:

$$A_1 = \varphi(A) \text{ и } B_1 = \varphi(B) \Rightarrow |A_1B_1| = k\,|AB|,$$

где $k > 0$. Число k называется **коэффициентом преобразования подобия.**

Теорема 1. **Пусть φ — преобразование подобия. Если точка X лежит между точками A и B, то $X_1 = \varphi(X)$ лежит между точками $A_1 = \varphi(A)$ и $B_1 = \varphi(B)$.**

Доказательство. По условию теоремы $|AB| = |AX| + |XB|$. При этом согласно определению для образов A_1, B_1, X_1 точек A, B, X мы получим следующее соотношение: $|A_1B_1| = k\,|AB| = k\,(|AX| + |XB|) = k\,|AX| + k\,|XB| = |A_1X_1| + |X_1B_1|$. Соотношение $|A_1B_1| = |A_1X_1| + |X_1B_1|$ показывает, что точки A, B, C лежат на одной прямой, причем X_1 лежит между точками A и B.

Теорема 2. **Три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, преобразование подобия отображает на три точки A_1, B_1, C_1, которые также не лежат на одной прямой.**

Доказательство. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда $|AB| + |BC| > |AC|$. Отсюда при $k > 0$ имеем:

$$k\,|AB| + k\,|BC| > k\,|AC| \text{ или } |A_1B_1| + |B_1C_1| > |A_1C_1|.$$

Это означает, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой.

Теорема 3. **Преобразование подобия отображает прямую на прямую.**

Доказательство. На основании теоремы 1 образы всех точек прямой l будут принадлежать некоторой прямой l_1. Остается доказать, что каждая точка прямой l_1 является образом некоторой точки прямой l.

Воспользуемся методом от противного. Допустим, что на прямой l_1 существует точка M, которая не является образом никакой точки прямой l в подобии φ. Применим обратное подобие φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}(A_1) = A,\ \varphi^{-1}(B_1) = B \text{ и т. д.}$$

Поскольку φ^{-1} подобие, то на основании теоремы 1 точки A, B, M, лежащие на одной прямой, отобразятся на точки A, B, M, лежащие на одной прямой l.

Обозначим образ точки M_1 в подобии φ^{-1} через M:

$$\varphi^{-1}(M_1) = M,\ M \in l.$$

Отсюда $\varphi(M) = M_1$, т. е. каждая точка прямой l_1 является образом некоторой точки прямой l в подобии φ.

Следовательно, прямая l_1 является образом прямой l в подобии φ.

Следствие. Образом отрезка при преобразовании подобия является отрезок, луча — луч, полуплоскости — полуплоскость, выпуклого (невыпуклого) угла — выпуклый (невыпуклый) угол.

Теорема 4. **Преобразование подобия φ сохраняет отношение длин отрезков,** т. е. если

$$\frac{|AB|}{|CD|} = k,\ \varphi([AB]) = [A_1B_1] \text{ и } \varphi([CD]) = [C_1D_1],$$

то

$$|A_1B_1| : |C_1D_1| = k.$$

Доказательство. На основании определения подобия имеем:

$$\left.\begin{array}{l} |A_1B_1| = k\,|AB| \\ |C_1D_1| = k\,|CD|, \end{array}\right\} \Rightarrow |A_1B_1| : |C_1D_1| = |AB| : |CD| = k.$$

Теорема 5. **Образом окружности при преобразовании подобия является окружность.**

Доказательство. I. Пусть O — центр окружности, а M — произвольная ее точка.

Пусть преобразование подобия φ точку M отображает на M. Тогда $|O_1M_1| = k\,|OM|$. Из этого равенства следует, что если точка M будет описывать окружность, то точка M_1 будет удалена от точки O на одно и то же расстояние $k\,|OM|$. Поэтому точка M_1 будет принадлежать окружности с центром O_1 и радиусом $k\,|OM|$.

Таким образом, окружность при преобразовании подобия отображается на окружность.

II. Нетрудно доказать, что каждая точка окружности с центром O и радиусом $k\,|OM|$ является образом некоторой точки данной окружности (проведите доказательство самостоятельно).

ЛИТЕРАТУРА

Адамар Ж. Элементарная геометрия. М., 1967, ч. I.

Адамар Ж. Элементарная геометрия. М., 1952, ч. II.

Александров М. И. Геометрические задачи на построение и методы их решения. М., 1952.

Александров И. И. Методы решений геометрических задач на построение. М., 1954.

Александров И. И. О составлении и решении геометрических задач на вращение. Одесса, 1895.

Александров П. С. Введение в теорию групп. М., 1933.

Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М., 1948.

Андреев А. Руководство к геометрии. Спб., 1876.

Андреев П. П. Курс элементарной геометрии. М., 1952.

Аргунов Б. И. и **Балк М. Б.** Геометрические построения на плоскости. М., 1957.

Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., 1966.

Астряб А. М. Наглядная геометрия. Киев, 1909.

Атанасян Л. С., Васильева М. В., Гуревич Г. Б., Кузьмина Т. Д., Редозубова О. С. Сборник задач по элементарной геометрии. М., 1964.

Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия I. М., 1974.

Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия II. М., 1975.

Балакин Н. А. Геометрические преобразования. Хабаровск, 1974.

Балк М. Г. и др. Математика после уроков. М., 1971.

Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. М., 1953.

Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., 1969.

Березанская Е. С., Колмогоров А. Н., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Сборник задач и вопросов по геометрии. М., 1959.

Бескин Л. Н. Стереометрия. М., 1960.

Беренс В. Начальная геометрия. Спб., 1872.

Болтянский В. Г. Геометрия. Учебное пособие для 9-го класса средней школы. М., 1964.

Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д. Геометрия 6. М., 1972.

Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д. Геометрия 7. М., 1974.

Борель Э. Элементарная математика. Одесса, 1922, ч. II.

Босса А. и **Рабьер А.** Курс элементарной математики. Спб., 1904.

Бурбаки Н. Архитектура математики. — В кн.: Очерки по истории математики. М., 1963.

Вейль Г. Симметрия. М., 1968.

Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971.

Вольберг О. А. Основные идеи геометрии. М., 1939.

Вульф Г. В. Симметрия и ее проявление в природе. М., 1908.

Герасимова И. С. и др. Сборник задач по геометрии (9, 10 классы). М., 1978.

Гильберт Д., Кон-Фосен С. Наглядная геометрия. М.—Л., 1936.

Глаголев Н. А. Элементарная геометрия. М., 1940, ч. I.

Глаголев Н. А. Элементарная геометрия. М., 1958, ч. II.

Гурвиц О. Ю., Гангнус Р. В. Начальные сведения по геометрии. М., 1936.

Гурвиц О. Ю., Гангнус Р. В. Систематический курс геометрии. М., 1935.

Гусев В. А. и др. Сборник задач по геометрии (6—8 классы). М., 1977.

Гусев В. А. и др. Векторы в школьном курсе геометрии. М., 1976.

Давыдов А. Ю. Элементарная геометрия. М., 1907.

Делоне Б. Н. и Житомирский О. Задачник по геометрии. М.—Л., 1949.

Делоне Б. Н., Житомирский О. К., Фетисов А. И. Сборник геометрических задач. М., 1951.

Извольский Н. А. Геометрия в пространстве. Стереометрия. М.—Л., 1923.

Киселев А. П. Геометрия. М., 1962.

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М., 1954, т. II.

Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия 9—10. М., 1977.

Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия 6. М., 1972.

Колмогоров А. Н. и др. Геометрия 7. М., 1972.

Колмогоров А. Н. и др. Геометрия 8. М., 1974.

Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе (общая методика). М., 1975.

Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе (частные методики). М., 1977.

Кокстер Г. С. Введение в геометрию. М., 1966.

Маркушевич А. И., Маслова Г. Г., Черкасов Р. С. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей и материалов. М., 1978.

Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., 1960.

Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. М., 1961.

Наумович Н. В. Простейшие геометрические преобразования в пространстве и задачи на построение. М., 1959.

Наумович Н. В. Гомотетия и подобие в школьном курсе геометрии (сборник статей по вопросам преподавания геометрии в средней школе). М., 1958.

Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. М.—Л., 1948, ч. I.

Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. М.—Л., 1949, ч. II.

Пиаже Ж., Бет Э., Дьедонне Ж., Лихнерович А., Шоке Г., Гаттеньо К. Преподавание математики. М., 1960.

Семушин А. Д., Фетисов А. И. Геометрические построения. М., 1966.

Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). М., 1962.

Скопец З. А. и др. Геометрия в 9 классе. М., 1975.

Скопец З. А. и др. Геометрия в 10 классе. М., 1976.

Тхамафокова С. Т. Значение геометрических преобразований в курсе стереометрии. — В сб.: Новые идеи в преподавании геометрии в школе. М., 1968.

Тхамафокова С. Т. Об изучении отражения относительно плоскости в школьном курсе стереометрии. — Математика в школе, 1968, № 4.

Фетисов А. И. Геометрия. — В кн.: Преподавание математики. М., 1957.

Фетисов А. И. Геометрия. Учебное пособие по программе старших классов. М., 1963.

Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. М., 1965.

Фетисов А. И. Геометрия в задачах. М., 1977.

Хинчин А. Я. Педагогические статьи. М., 1963.

Черкасов Р. С. Сборник задач по стереометрии. М., 1956.

Шван В. Элементарная геометрия. М., 1937, т. I.

Шубников А. В. Симметрия. М.—Л., 1940.

Энциклопедия элементарной математики. М., 1963, т. IV.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I

Перемещения пространства

Глава II

Преобразования подобия

Валерий Александрович Гусев
Сариет Тхайхачевна Тхамафокова

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Пособие для учителей

ИБ № 3917

Редактор Т. А. Бурмистрова
Художник Б. Н. Юдкин
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Л. Е. Пухова
Корректор О. В. Ивашкина

Сдано в набор 25.12.78. Подписано к печати 05.04.79. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 6. Уч.- изд. л. 5,81. Тираж 40 000 экз. Заказ 19. Цена 15 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59

15 к.